Math. P.
7.

Math. P. 7.

Kurze Anleitung zur ebenen Dreyeck=Meßkunst

nebst nöthigen Tabellen

besonders für diejenigen, so diese Wissenschaft nur auf die Feldmeßkunst, Krieges= und bürgerlichen Baukunst anwenden wollen,

von dem Verfasser der Berliner Sammlung mathematischer Tafeln entworfen.

R

Berlin 1784.
bey Sigismund Friedrich Hesse, Buchhändler in der breiten Straße.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht.

Ich finde bey diesem kleinen Werke nur sehr wenig zu erinnern; es enthält zuförderst, so kurz als möglich, eine Anleitung, zur Kenntniß und Berechnung der Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunst; diese kurze Anleitung hat mir unumgänglich für Anfänger nöthig geschienen, weil außerdem die Lehrsätze, worauf die Auflösung der Dreyecke beruhen, nur höchst verworren und unvollständig begriffen werden können. Ich muß daher auch diesen Theil der Dreyeck-Meßkunst meinen Lesern vorzüglich empfehlen, weil ohne diese vorläufigen Kenntnisse es nicht möglich ist, das übrige mit wahrem Nutzen zu gebrauchen. Sie werden daher sehr wohl thun sich den Zusammenhang der trigonometrischen Linien, soweit ich ihn in diesem Abschnitt abgehandelt habe, recht geläufig zu machen und dem Gedächtnisse einzuprägen, da dieses in der Folge dienet, Rechnungen kürzer und geschmeidiger zu führen; besonders sind die zu Ende des § 23 angegebene vier Formeln in der ganzen Dreyeck-Meßkunst von unumgränztem Gebrauche, so wie ich mich denn derselben wirklich, in der Folge,

mit Vortheil bedienet habe. Eben so wichtig ist die Bekanntschaft mit den Eigenschaften und der Berechnung der Logarithmen, denn ohne den Gebrauch der Logarithmen würde die Dreyeck-Meßkunst sich nur höchst lästig anwenden lassen. Es ist daher unumgänglich nöthig, eine Sache, ihrem ganzen Umfange nach, zu kennen, welche so große Vortheile und Abkürzungen einer Wissenschaft bringt, deren Nutzen nicht bezweifelt werden kann. Ueberdem so ist dieser Abschnitt als eine Einleitung zum Gebrauch der logarithmischen Tafeln zu betrachten, und wird jeden, der sich mit demselben recht bekannt gemacht hat, in den Stand setzen, diese Tabellen eben so gut als die Sinus-Tafeln mit Zuverläßigkeit zu gebrauchen, welches ohne Kenntniß der Eigenschaften und der Entstehung der Logarithmen nicht anders als auf eine verworrene und unvollkommene Art geschehen könnte, als wodurch öfters die gröbsten Fehler begangen werden würden. Bey den Lehrsätzen zur Berechnung der geradlinigten Dreyecke, habe ich überhaupt drey Hauptfälle und zwey Nebenfälle unterschieden, und für jeden mehrentheils verschiedene Auflösungen angegeben, die zu dieser oder jener Absicht mehr oder weniger bequem sind. Ich überlasse es daher meinen Lesern unter den verschiedenen Methoden, diejenige für jeden Fall zu wählen, welche sie ihrer Absicht am angemessensten finden. Ob ich gleich hoffen darf, daß jeder, der nur die ersten Grundsätze der Meßkunst kennet, meine Auflösungen einsehen

und

und verstehen wird, so habe ich dennoch denen zu gefallen, die nur gewöhnlich nach Regeln verfahren können, für jeden Fall deutliche und vollständige Regeln in Worten ausgezogen, und überdem jeden Fall und jede Regel durch ein, oder wo es nöthig war, durch etliche Beyspiele erläutert, welches mir um desto nöthiger geschienen, da öfter ein einziges Beyspiel weit mehr als alle Regeln die Sache erläutert. Endlich so habe ich auch gezeigt: wie man die Dreyeck-Meßkunst auf die Feldmeßkunst anwenden müsse, um sowohl die Entfernungen der Gegenstände von angenommenen Standpunkten als auch untereinander zu bestimmen. Dieser Theil der practischen Feldmeßkunst ist vorzüglich derjenige, welcher bey Aufnehmung der Plane von Gegenden und ganzen Landschaften unumgänglich gebraucht wird, und daher jedem Officier, der eine Situations-Charte mit einiger Zuverläßigkeit entwerfen, und die Hauptpunkte nach geometrischen oder trigonometrischen Gründen bestimmen will, eben so unentbehrlich, wie dem Feld- und Landmesser, welcher in verschiedenen Absichten Charten von Ländereyen, Wiesen, Wälder u. s. w. aufzunehmen genöthiget ist. Hier habe ich bloß die zu dieser Absicht nöthigen trigonometrischen Auflösungen abhandeln können, und dabey voraussetzen müssen, daß das beym Aufnehmen selbst zu beobachtende Verfahren meinen Lesern aus der practischen Feldmeßkunst schon bekannt sey, wozu sie gegenwärtig in **Böhms** Meßkunst auf dem Felde, vorzüglich

züglich aber in Mayers Unterricht zur practischen Geometrie die nöthigen Anleitungen finden können, bis daß meine eigene kurze und hinlänglich vollständige Anleitung zur Feldmeßkunst die Presse verlassen haben wird. Ganz zu Ende dieses Abschnittes habe ich endlich noch einige Aufgaben, die das Höhenmessen betreffen, abgehandelt, und schließe mit der Auflösung einer für die practische Feldmeßkunst sehr wichtigen Aufgabe: aus der bekannten Lage dreyer Oerter die Lage eines vierten Ortes, bey welchen die Winkel gemessen worden, so daselbst, die nach den dreyen Gegenständen gezogene Gesichtslinien einschließen, zu bestimmen.

Da die Dreyeck-Meßkunst ohne Tabellen nicht angewendet werden kann, so habe ich die nöthigen Tabellen, so viel als möglich in die Kürze gezogen und diesem Werke beygefüget; ich hoffe, ein jeder meiner Leser, wird mir zugeben, daß sich nicht mehr auf so wenigen Blättern, als diese Tabellen einnehmen, thun lasse, und ich glaube doch, daß sie völlig zureichen, wo es darauf ankommt, aus dreyen gegebenen Stücken eines Dreyeckes, die übrigen drey, durch Rechnung, zu bestimmen. Dieses ist aber eigentlich bloß der Vorwurf dieses kleinen Werkes, welches ich auf dringendes Anhalten verschiedener meiner respectiven Herren Zuhörer entworfen habe, welche die Geometrie und Trigonometrie allein dazu hören, um davon unmittelbar Anwendung auf die Feldmeßkunst oder Auflösung verschiedener in die Fortification und Civil-

vil-Baukunst einschlagender Aufgaben zu machen, wozu ich mich auch um desto ehe entschlossen habe, da ich für diejenigen, welche von der Trigonometrie eine weitläuftigere Anwendung machen wollen, schon bereits vollständig im zweyten Hefte meines Taschenbuches über die Meßkunst gesorget habe.

Die Tabellen der Quadrat- und Cubic-Zahlen von 1 bis 1000, welche bey Ausziehung der Wurzeln große Dienste leisten, können nicht anders als meinen Lesern sehr angenehm seyn; ich habe sie daher gleich nach den Logarithmen der Zahlen eingeschaltet, und dadurch gleichsam diese Logarithmen von den trigonometrischen Linien und ihren Logarithmen, etwas mehr abgesondert, welches mir um deswillen sehr nöthig geschienen hat, damit man nicht die Logarithmen der Zahlen mit den Logarithmen der trigonometrischen Linien, beym Gebrauche, verwechsele; denn obgleich zwischen beyden ein starker Unterschied ist, so halte ich dennoch dafür, daß, sie etwas von einander zu trennen, keine überflüßige Sache sey, zumalen da es selbst einem geübten Rechner leicht begegnen kann, die eine Zahl für die andere auszuschreiben. Da zu Ende der Tafeln für die Quadrat- und Cubic-Zahlen eine Seite leer blieb, so habe ich sie genutzet, um geschmeidige Formeln zur Berechnung der Kugel-Haufen zu liefern, und in der Erklärung und dem Gebrauch der Tabellen die Anwendung derselben durch Beyspiele vollständig erläutert. Die Tafeln der Hülfslinien

der Dreyeck=Meßkunst, welche den Beschluß machen, gehen nicht auf eine gleichförmige Art fort, sondern da die Tangenten solcher Winkel die nahe bey 90° fallen, oder der Cotangenten kleiner Winkel, sowohl als die Logarithmen der Sinus, Tangenten und Cotangenten kleiner Winkel große Unterschiede haben, so habe ich die Hülfslinien, nebst ihren Logarithmen für die fünf ersten und fünf letzten Grade von Minute zu Minute gegeben, hingegen eben diese Linien für den übrigen Theil des ersten Viertheils eines Kreises nur von 10 zu 10 Minuten fortgesetzet, dagegen aber auch bey jeder Hülfslinie oder ihrem Logarithmen, in besondern Spalten, die Unterschiede angesetzet, als durch welche der Gebrauch dieser Tabellen beynahe eben so sehr erleichtert wird, als wenn die Tabellen von Minute zu Minute fortgiengen, so wie ich auch dieses hinlänglich in der Erklärung und dem Gebrauch dieser Tabellen gezeiget habe.

Ich schließe mit dem aufrichtigen Wunsch, daß dieses kleine Werk denjenigen recht nützlich werden möge, welche bey ihren Geschäften die Dreyeck=Meßkunst unumgänglich gebrauchen, und ohne welche in sehr vielen Fällen nichts zuverläßiges ausgeführet werden kann.

Berlin,
im Februar des Jahres
1784.

der Verfasser.

Einleitung.

§. 1.

Ein jedes geradlinigtes Dreyeck besteht überhaupt aus dreyen Seiten und dreyen Winkeln, und kann sobald nur drey von diesen Stücken gegeben sind, verzeichnet werden, wenn wir nur den einzigen Fall, wo alle drey Winkel allein gegeben sind, davon ausnehmen, weil dieser Fall unbestimmt ist, und nur allein die Art eines Dreyeckes angiebt. Soll daher ein Dreyeck ausgemessen werden, so hat man nicht nöthig alle seine Seiten und Winkel zu messen, sondern weil drey Stück davon zureichen, um es zu verzeichnen, so können die übrigen drey immer leicht aus der Zeichnung gefunden werden. Da nun gerade Linien sowohl als geradlinigte Winkel sich immer durch Zahlen leicht ausdrucken lassen, indem man ihr Verhältniß zu andern Linien oder Winkeln angiebt, so war es natürlich darauf zu fallen, aus dreyen gegebenen und in Zahlen ausgedruckten Stücken eines jeden Dreyeckes die übrigen drey durch Rechnung zu finden, und dieses Verfahren die Ausmessung eines Dreyeckes zu nennen. Daß diese Ausmessung eines Dreyeckes nach gewissen Regeln geschehen müsse, und daß folglich hierzu eine eigene Wissenschaft gehöre, begreift leicht ein jeder von selbst, der nur einigermaßen nachdenkt, daß es nicht so leicht, ja sogar unmöglich ist, gerade Linien mit Winkeln unmittelbar zu vergleichen, da beyde Größen von ganz verschiedener Art sind. Diese Wissenschaft ist es, welche wir im Deutschen am besten durch ebene

Dreyeck-Meßkunst ausdrücken können, weil sie, wie wir oben gezeiget haben, diejenige Wissenschaft ist, die uns Dreyecke auszumessen lehret, und wenigstens uns Deutsche eben so verständlich seyn muß, als das aus dem Griechischen abgeleitete lateinische Wort: Trigonometria.

§. 2.

Da es, wie ich oben angeführet habe, nicht möglich ist, die Winkel eines Dreyeckes mit seinen Seiten unmittelbar zu vergleichen, so mußte man statt den Winkeln selbst, andere Größen, die mit denselben in Verbindung stehen, in die Rechnung einführen und gebrauchen. Am natürlichsten verfiel man zuerst auf die Sehnen der Bögen, die mit gleichem Halbmesser zwischen den Schenkeln der Winkel eines Dreyeckes beschrieben worden, denn da sich, wie es aus der Meßkunst bekannt ist, ein Kreis durch jede drey gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, leicht beschreiben läßt, so kann man auch jedes gegebene Dreyeck in einen Kreis einschließen, welcher durch die Spitzen der dreyen Winkel des Dreyeckes gehe. Alsdenn werden die Seiten des Dreyeckes Sehnen der Bögen, so mit gleichem Halbmesser zwischen den Schenkeln eines jeden Winkels beschrieben worden, und sind daher geschickt, die Winkel mit den Seiten eines Dreyeckes zu vergleichen.

Aus der Meßkunst ist ferner bekannt, daß die Sehnen ähnlicher Bögen in verschiedenen Kreisen; sich wie die Halbmesser dieser Kreise verhalten, mithin giebt dieses ein Mittel, die Größe der Sehne eines jeden Bogens zu bestimmen, sobald man nur den Halbmesser kennet, womit dieser Bogen ist beschrieben worden, und überdem weiß, wie groß die Sehne eines ähnlichen und mit einem andern Halbmesser beschriebenen Bogens ist. Die Alten berechneten daher die Sehnen aller Bögen für einen bestimmten Halbmesser,

messer, und brachten dieselben in Tabellen, um sich derselben zur Auflösung der Dreyecke zu bedienen.

§. 3.

Man fand bald, daß der Gebrauch der Sehnen noch nicht so einfach wäre als man ihn wohl wünschen könnte, denn da die im vorigen § angegebene Umschreibung eines Kreises um ein gegebenes Dreyeck, nicht Bögen gab, welche den Winkeln des Dreyeckes gradezu zum Maaße dienen konnten, weil, wie es aus der Meßkunst bekannt ist, nur die Hälfte dieser Bögen das Maaß der Winkel ist, die mit ihren Spitzen im Umkreise des beschriebenen Kreises liegen. Daher kam es, daß man bald den Gebrauch der Sehnen abschaffte, und dagegen die halben Sehnen der Bögen beybehielt, und sie Sinus der halben Bögen, die das Maaß der Winkel des umschriebenen Dreyeckes waren, nannte; es ist demnach der Sinus eines Winkels oder eines Bogens nichts anders als die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens, der Halbmesser des Kreises, womit der Bogen beschrieben worden, mag seyn, welcher er wolle. Dieses können wir am besten durch folgende Formel ausdrucken, wenn wir nur den Winkel, dessen Maaß der halbe Bogen ist, auf welchen er stehet, α nennen, und unter Chord. die Sehne verstehen,

$$\text{Sinus } \alpha = \tfrac{1}{2} \text{ Chord. } 2\,\alpha$$

und welches in Worten ausgedruckt eben so viel sagt, als: der *Sinus* eines Winkels oder Bogens α, ist eben so groß als die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens.

Diese und andere aus dem Kreise hergenommene Linien sind es nun, die wir vorzüglich wissen müssen, um Dreyecke durch Rechnung bestimmen zu können. Wir wollen daher uns zuförderst bemühen, diese

Linien sämmtlich näher kennen zu lernen, indem wir gewisse Kennzeichen, wodurch sie bestimmt werden, uns bekannt machen. Wir können diese verschiedene Linien, welche zur Auflösung der Dreyecke gebraucht werden, überhaupt Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunst, nennen.

Kennzeichen und Eigenschaften der Hülfslinien.

§. 4.

Wenn wir mit einem beliebigen Halbmesser CA Fig. 1 aus dem Mittelpunkt C einen Kreisbogen AB beschreiben, und A zum Anfangspunkt annehmen, so ist B der Endpunkt dieses Bogens; ziehen wir nun von dem Anfangspunkt A nach dem Mittelpunkt C eine gerade Linie AC, und lassen auf derselben von dem Endpunkt B die gerade Linie BD senkrecht fallen, so ist BD der Sinus und AD der Sinus versus des Bogens AB, oder, da AB den Winkel ACB am Mittelpunkte misset, so kann man auch sagen: BD sey der Sinus und AD der Sinus versus von dem Winkel ABC.

Wenn durch den Anfangspunkt A des Bogens eine gerade Linie, wie AE auf dem Halbmesser AC senkrecht gezogen wird, so heißet diese Linie, wie es aus der Meßkunst bekannt ist, überhaupt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises; ziehet man nun von dem Mittelpunkt C des Kreises eine gerade Linie durch den Endpunkt B des Bogens AB, bis an die Berührungslinie in E, so erhält die Linie AE ihre bestimmte Größe und wird die Tangente des Bogens AB oder des Winkels ACB genannt; die gerade Linie CE hingegen, welche die Tangente bey E schneidet, heißet sodann die Secante des Bogens AB oder des Winkels ACB.

Aus dem, was wir jetzt eben angeführt haben, folgt unmittelbar, daß, wenn wir den Bogen AB oder den Winkel ACB α nennen, und Sinus durch sin., Tangens durch tang, Secans durch sec. und Sinus versus durch sin. vers. ausdrücken, auch seyn werde

$$BD = \sin.\ \alpha$$
$$AD = \sin.\ \text{vers}.\ \alpha$$
$$AE = \text{tang}.\ \alpha$$
$$CE = \sec.\ \alpha.$$

§. 5.

Wird hingegen CF auf den Halbmesser AC beym Mittelpunkte C senkrecht errichtet, so wird der Bogen AF dem vierten Theil eines Kreises gleich, und der Winkel ACF, dessen Maaß der Bogen AF ist, ein rechter Winkel; folglich, wenn der ganze Umkreis in 360 gleiche Theile oder Grade eingetheilet ist, $AF = ACF = 90^\circ$ und $BF = BCF = 90^\circ - \alpha$. Siehet man jetzt daher F als den Anfangspunkt und B als den Endpunkt des Bogens FB an, und verfährt bey diesem Bogen eben so, wie wir es im vorigen § bey dem Bogen AB gezeiget haben, so werden wir leicht gewahr, daß folgende Ausdrücke richtig sind

$$BG = \sin.\ BF = \sin.\ BCF$$
$$FG = \sin.\ \text{vers}. BF = \sin.\ \text{vers}.\ BCF$$
$$FH = \text{tang}. BF = \text{tang}. BCF$$
$$CH = \sec.\ BF = \sec.\ BCF.$$

oder da wir $BF = BCF = 90^\circ - \alpha$ annehmen können, so wird auch

$$BG = \sin.\ (90^\circ - \alpha)$$
$$FG = \sin.\ \text{vers}.\ (90^\circ - \alpha)$$
$$FH = \text{tang}.(90^\circ - \alpha)$$
$$CH = \sec.\ (90^\circ - \alpha)$$

Endlich so ist man darinnen übereingekommen, daß man beständig statt sin (90° — α) lieber Cosinus α, statt sin. vers. (90° — α) kürzer Cosinus versus α, statt tang (90° — α) besser Cotangente α und statt sec. (90° — α) auch Cosecante α schreiben wolle. So daß, wenn man alle diese Benennungen abgekürzt schreibet, folgende Ausdrücke leicht verstanden werden:

$$BG = \cos. \alpha$$
$$FG = \cos. \text{vers.} \alpha$$
$$FH = \cot. \alpha$$
$$CH = \text{cosec.} \alpha.$$

§. 6.

Um die sämmtlichen Benennungen, so wir in vorigen beyden §§. angegeben haben, desto deutlicher und besser zu übersehen, wollen sie hier sämmtlich zusammen fassen, und sie neben einander schreiben:

$BD = \sin \alpha$	$BG = \cos. \alpha$
$AD = \sin. \text{vers.} \alpha$	$FG = \cos. \text{vers.} \alpha$
$AE = \text{tang.} \alpha$	$FH = \cot. \alpha$
$CE = \sec. \alpha$	$CH = \text{cosec.} \alpha.$

Nehmen wir aber $BF = BCF = \beta$ an, so wird $AB = ACB = 90° — \beta = \alpha$ und man kann auch folgendermaßen schreiben:

$BD = \sin. (90° — \beta)$	$BG = \cos, (90° — \beta)$
$AD = \sin. \text{vers.} (90° — \beta)$	$FG = \cos. \text{vers.} (90° — \beta)$
$AE = \text{tang} (90° — \beta)$	$FH = \cot. (90° — \beta)$
$CE = \sec. (90° — \beta)$	$CH = \text{cosec.} (90° — \beta)$

oder nach dem, was wir zu Ende des vorigen § festgesetzt haben, wenn wir bey der zwoten Abtheilung nur das umgekehrte Verfahren beobachten:

$BD = \cos. \beta$	$BG = \sin. \beta$
$AD = \cos. \text{vers.} \beta$	$FG = \sin. \text{vers.} \beta$
$AE = \cot. \beta$	$FH = \text{tang.} \beta$
$CE = \text{cosec.} \beta$	$CH = \sec. \beta$

Ver-

Vergleichen wir daher diese letzten Ausdrücke mit denen, welche wir gleich zu Anfang dieses § bestimmt haben, so erhalten wir folgende:

BD = sin. α = cos. β	BG = cos. α = sin. β
AD = sin. vers. α = cos. vers. β	FG = cos. vers. α = sin. vers. β
AE = tang. α = cot. β	FH = cot. α = tang β
CE = sec. α = cosec. β	CH = cosec. α = sec. β

§. 7.

Diese acht verschiedene Linien sind es nun, die man sich vorzüglich gut bekannt machen muß, wenn man die Dreyeck-Meßkunst gründlich einsehen und anwenden will. Die acht letzten Ausdrücke lehren vorzüglich, wie man die Cosinus, Cotangenten u. s. w. in Sinus, Tangenten u. s. w. verwandeln könne, wenn einmal alle Hülfslinien von 0 bis 90° bestimmt sind. Denn da immer β der Ueberrest von 90° ist, wenn ich davon α abziehe, so folgen aus den letzten Ausdrücken folgende Regeln:

Um den *Cosinus* eines Bogens oder Winkels zu finden, ziehe man von 90° den gegebenen Bogen oder Winkel ab, und nehme den *Sinus* des Ueberrestes.

Um den *Cosinus versus* eines Bogens oder Winkels zu finden, ziehe man den gegebenen Bogen oder Winkel von 90° ab und suche den *Sinus versus* des Ueberrestes.

Und so sieht man leicht, wie man nach ähnlichen Regeln die Cotangente und die Cosecante eines Bogens oder Winkels durch die Tangente und der Secante des Ueberrestes von 90° angeben müsse.

Eben so erhellet, wie man umgekehrt, wenn die Cosinus, Cosinus versus, Contangenten und Cosecanten aller Bögens oder Winkel von 0 bis 90° gegeben

sind, diese in Sinus, Sinus versus, Tangenten und Secanten von Bögen oder Winkeln verwandeln könne, die mit den vorigen zusammengenommen 90° machen; nemlich:

Um den *Sinus* eines Winkels oder Bogens zu finden, ziehe man den gegebenen Bogen oder Winkel von 90° ab und nehme vom Ueberreste den *Cosinus*.

Und eben so verstehet sich dieses von den übrigen Fällen: Man pflegt das, was übrig bleibt, wenn ein Bogen oder Winkel von 90° abgezogen wird, den Zusatz des Winkels oder Bogens zu 90° zu nennen, und daraus ist klar, daß der *Cosinus* eines Bogens oder Winkels nichts anders sey, als der *Sinus* des Zusatzes von 90° von eben dem Winkel oder Bogen; und so ist auch umgekehrt der *Sinus* eines Bogens der *Cosinus* des Zusatzes eben dieses Bogens zu 90°.

Und eben das, was wir von dem Sinus und Cosinus eines Bogens hier festsetzen, gilt ohne alle Veränderung, auch für die übrigen Hülfslinien.

§. 8.

Nachdem wir nunmehro die Hülfslinien von 0 bis 90° oder im ersten Viertheil des Kreises haben kennen gelernet, so müssen wir uns noch bemühen, eben diese Linien auch von 90° bis 180° oder im zweyten Viertheil des Kreises, in jedem vorkommenden Fall, leicht finden zu können. In dieser Absicht wollen wir uns den Bogen AF bis in B′ verlängert gedenken, so daß AB′ > 90° werde; um nun den Sinus dieses Bogens zu finden, verlängere man den Halbmesser AC, welcher durch den Anfangspunkt A des Bogens AB′ gehet, über C, oder ziehe den Durchmesser AI des mit AC beschriebenen Kreises, und lasse von dem Endpunkt B′ die gerade Linie B′D′ auf diesen Durchmesser senkrecht fallen, so ist B′D′ der Sinus

des

des Bogens AB′ oder des Winkels ACB′. Nachdem nun der Sinus des Winkels ACB′ oder des Bogens AB′ bekannt ist, so ist es leicht den Sinus versus eben dieses Bogens oder Winkels anzugeben, wenn man nur bemerkt, daß dieser hier auf eine ähnliche Art, wie im ersten Viertheil eines Kreises gefunden werden muß. Hieraus folgt demnach, daß AD′ der Sinus versus des Bogens AB′ oder des Winkels ACB′ seyn müsse.

Die Tangente dieses Bogens muß eben sowohl auf die durch den Anfangspunkt des Bogens laufende Berührungslinie abgeschnitten werden, als wenn er sich im ersten Viertheil des Kreises endigte; da nun aber eine Linie, welche von C durch B′ gezogen wird, nie die durch A gezogne Berührungslinie erreichen kann, man mag beyde auch so weit verlängern als man will, so muß man hier umgekehrt verfahren, und von B′ nach C eine gerade Linie ziehen, welche, wenn man sie nur genugsam unterhalb verlängert, immer irgendwo, wie hier in E′, die Berührungslinie schneiden und die Tangente des Bogens AB′ oder des Winkels ACB′ bestimmen wird.

Diesemnach wird AE′ die Tangente, und CE′ die Secante des Bogens AB′ oder des Winkels ACB′ seyn.

Bezeichnen wir daher den Bogen AB′ oder den Winkel ACB′ durch α', so wird

$$B'D' = \sin.\ \alpha'$$
$$AD' = \sin.\ \text{vers.}\ \alpha'$$
$$AE' = \text{tang.}\ \alpha'$$
$$CE' = \sec.\ \alpha'$$

§. 9.

Nun ist es leicht, nach Anleitung des § 5 zu schließen, daß, wenn wir den Bogen FB′ oder den Winkel FCB′ durch β' bezeichnen auch seyn werde.

$$B'D' = \text{sin. } \beta'$$
$$FG' = \text{sin. vers. } \beta'$$
$$FH' = \text{tang. } \beta'$$
$$CH' = \text{sec. } \beta'$$

oder da $\beta' = \alpha' - 90^\circ$ ist, so kann man auch schreiben:

$$B'D' = \text{sin. } (\alpha' - 90^\circ)$$
$$FG' = \text{sin vers. } (\alpha' - 90^\circ)$$
$$FH' = \text{tang. } (\alpha' - 90^\circ)$$
$$CH' = \text{sec. } (\alpha' - 90^\circ)$$

Nimmt man daher auch hier an, daß man statt sin. $(\alpha' - 90^\circ)$ kürzer und besser schreiben wolle cosα' und dehnet diesen Begriff auch auf die übrigen drey Linien aus, so folgt, daß auch seyn werde

$$B'G' = \text{sin. } \beta' = \text{cos. } \alpha'$$
$$FG' = \text{sin. vers. } \beta' = \text{cos. vers. } \alpha'$$
$$FH' = \text{tang. } \beta' = \text{cot } \alpha'$$
$$CH' = \text{sec. } \beta' = \text{cosec } \alpha'$$

Setzen wir daher hier diese Schlüsse eben so fort, wie wir es §. 6. bey einem Bogen gethan haben, der sich im ersten Viertheil eines Kreises endigte, so finden wir eben so, wie zu Ende des angeführten §.

$B'D' = \text{sin. } \alpha' = \text{cos. } \beta'$	$B'G' = \text{cos. } \alpha' = \text{sin. } \beta'$
$AD' = \text{sin. vers. } \alpha'$	$FG' = \text{cos. vers. } \alpha' = \text{sin. vers. } \beta'$
$AE' = \text{tang. } \alpha' = \text{cot. } \beta'$	$FH' = \text{cot. } \alpha' = \text{tang. } \beta'$
$CE' = \text{sec. } \alpha' = \text{cosec. } \beta'$	$CH' = \text{cosec. } \alpha = \text{sec. } \beta'$

Es lassen sich daher hier eben die Folgerungen, wie §. 7. ziehen, und es ist leicht, aus den hier zuletzt angegebenen Ausdrücken, ähnliche Regeln abzuleiten, wann man nur bemerkt, daß hier β' den Ueberschuß der Bogens α' über 90° vorstellet, anstatt, daß β im §. 7. den Mangel des Bogens α bezeichnete, um 90° zu werden.

§. 10.

§. 10.

Die Ausdrücke des vorigen §. sind aber nur in dem Fall richtig, wenn bloß auf die Größe der Hülfslinien und nicht auf ihre verschiedene Lage gesehen wird. Will man daher auch die Lage der Hülfslinien im zweyten Viertheil des Kreises von der im ersten Viertheil gehörig unterscheiden, so bemerke man, daß B'D' oder der Sinus von α' eben noch so wie BD oder der Sinus von α liegt, denn beyde Linien liegen über dem Durchmesser AI. Hingegen haben B'G' und BG eine ganz verschiedene Lage oder die Lage des cos. α' ist der Lage des cos. α entgegengesetzt, da die erste von beyden Linien rechter Hand, die andere aber in entgegengesetzter Richtung, linker Hand des Durchmessers FL fällt. Eben so kann man die Lage von AE' von der Lage von AE unterscheiden, und da auch CE von C durch B nach E, hingegen CE' von B' rückwärts durch C nach E' gezogen werden mußten, so ist klar, daß auch hier eine Verschiedenheit der Lage statt findet, und eben dieses lässet sich so, auf alle übrige Hülfslinien ausdehnen.

Diesen Unterschied der Lage pflegt man nun durch die bekannten Zeichen + und — auszudrücken, und indem man das erste dieser Zeichen gebraucht, um die Lage aller Hülfslinien solcher Bögen, die sich im ersten Viertheil des Kreises endigen, anzuzeigen, so bedienet man sich des zweyten, in allen Fällen, wo eine Hülfslinie, die zu einem Bogen gehört, der sich im zweyten Viertheil eines Kreises endiget, oder der größer als 90° ist, ihre Lage, in Rücksicht der Hülfslinien im ersten Viertheil eines Kreises, verändert, um diese Veränderung ihrer Lage anzugeben. Diesem zufolge erhalten wir statt den letzten Ausdrücken des vorigen §. vielmehr folgende:

B'D'

$B'D' = \sin.\alpha' = +\cos.\beta'$	$B'G' = \cos.\alpha' = -\sin.\beta'$
$AD' = \sin.\ \text{vers}.\ \alpha'$	$FG' = \cos.\ \text{vers}.\ \alpha' = +\sin.\ \text{vers}.\ \beta'$
$AE' = \text{tang}\,\alpha' = -\cot\beta'$	
$CE' = \sec.\alpha' = -\text{cosec}.\beta$	$FH' = \cot.\alpha' = -\text{tang}.\beta'$
	$CH' = \text{cosec}.\alpha = +\sec\beta'$

§. 11.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich über die Hülfslinien der Bögen, die sich im dritten und vierten Viertheil des Kreises endigen, anstellen; allein da wir in der ebenen oder geradlinigten Dreyeck-Meßkunst immer solche Bögen und Winkel vermeiden können, die mehr als 180° betragen, so wollen wir uns auch hierbey nicht ferner aufhalten, besonders da bereits dasjenige, was hierüber umständlich gesagt werden kann, im zweyten Hefte meines Taschenbuches vollständig ist abgehandelt worden, folglich sich daselbst leicht nachschlagen läßt. Vielmehr wollen wir jetzt zeigen, wie man die Hülfslinien der Bögen, die mehr als 90° und doch weniger als 180° betragen, durch diejenigen Hülfslinien bestimmen könne, welche zu den Bögen oder Winkeln unter 90° gehören.

In dieser Absicht bemerken wir zuförderst, daß, je größer wir den Bogen AB im ersten Viertheil eines Kreises annehmen, desto größer wird auch der Sinus dieses Bogens oder die Linie BD, und wenn der Bogen AB = 90° wird, so ist auch der Sinus dem Halbmesser des Kreises gleich. Nach 90° nehmen hingegen die Sinus der Bögen eben so wieder ab, wie sie bis 90° zugenommen haben, und zwar um destomehr, je größer wir einen Bogen über 90° annehmen, dergestalt, daß bey 180° der Sinus wieder eben so Nulle wird, wie er es bey 0° war. Dieses alles lässet sich leicht aus der ersten Figur beurtheilen, und man kann hieraus schon natürlich schließen, daß gewisse Bögen über 90° eben so große Sinus haben müssen als andere

andere unter 90°. Da nun $B'D'$ sowohl der Sinus von α' als auch von $B'I$ ist, wenn man nur diesen letzten Bogen von I anfängt zu zählen, so folgt, daß, weil $B'I = 180° - \alpha'$ ist, überhaupt seyn werde,

$$\sin.\ \alpha' = \sin.\ (180° - \alpha')$$

oder der *Sinus* eines Bogens über 90' wird gefunden, wenn man den gegebenen Bogen von 180° wegnimmt, und für den Ueberrest den *Sinus* sucht.

Aus letzterem Ausdruck ergeben sich ohne Mühe folgende, wenn man den Halbmesser des Kreises durch r bezeichnet.

$$\sin.\ 0° = \sin.\ 180° = 0.$$
$$\sin.\ 90° = r$$

§. 12.

Aehnliche Betrachtungen zeigen, daß die Cosinus bis 90° beständig abnehmen; bey 90° selbst = 0 werden, nachher aber wieder wachsen bis 180°, wo der Cosinus eben so, wie bey 0° dem Halbmesser des Kreises gleich ist. Ferner wird man leicht einsehen, daß der Bogen $B'I$ mit dem Bogen AB' einerley Cosinus habe, da in beyden Fällen dieser durch die Linie $B'G'$ bestimmt wird; nur muß man bemerken, daß in Rücksicht der Anfangspunkte, wo man die Bögen zu zählen anfängt und des Durchmessers FL diese Linie verschiedene Lage habe, daher können wir setzen:

$$\cos.\ \alpha' = -\cos.\ (180° - \alpha')$$

oder der *Cosinus* eines Bogens über 90° wird gefunden, wenn man den gegebenen Bogen von 180° abzieht, und den *Cosinus* des Ueberrestes suchet, allein er hat mit demselben eine entgegengesezte Lage.

Diesem zufolge erhalten wir $\cos.\ 0° = r$, $\cos.\ 90° = 0$ und $\cos.\ 180° = -\cos.\ (180° - 180°) = -\cos.\ 0° = -r$.

§. 13.

Wenn der Bogen AB größer wird, so nimmt auch die Linie AE zu. Es wächset demnach die Tangente eines Bogens unter 90° zugleich mit dem Bogen; nun ist bey 0 auch die Tangente = 0, und um die Tangente von 90° zu finden, müßte man von C durch F eine gerade Linie ziehen, und dieselbe so weit verlängern, bis sie die ebenfalls verlängerte Linie AE irgendwo erreichte, allein da CF mit AE gleichläuft, so giebt es nirgend einen Zerschneidungspunkt für diese Linien, mithin ist es nicht möglich bey 90° eine Tangente anzugeben, ohngeachtet man leicht einsiehet, daß die Tangenten um desto größer werden, je näher der Bogen bey 90° ist. Man sagt daher in diesem Falle die Tangente von 90° lasse sich nicht angeben oder sie sey unendlich groß, und druckt dieses durch das bekannte Zeichen des Unendlichen ∞ aus. Es ist demnach der Ausdruck tang 90° = ∞ jetzt sehr verständlich.

Nehmen wir hingegen einen Bogen etwas größer als 90° an, so fällt die Tangente wie AE′ unterhalb des Durchmessers AI, und ist um desto größer, je näher der Bogen bey 90° ist; nachher nehmen die Tangenten immer mehr ab, je größer der Bogen wird, so daß bey 180° die Tangente wiederum Nulle ist, wie bey 0°.

Nehmen wir daher den Bogen B′I eben so groß als den Bogen AB, so kann man leicht zeigen, daß in diesem Fall auch AE = AE′ oder tang AB = — tang AB′ seyn werde; mithin muß auch, weil AB = B′I = 180° — α' und AB′ = α' ist, folgender Ausdruck richtig seyn:

$$\tang \alpha' = - \tang. (180° - \alpha')$$

oder die *Tangente* eines Bogens oder **Winkels**, der über 90° ist, wird gefunden, wenn man den gegebenen Bogen oder **Winkel** von 180° abzieht,

und

und vom Ueberreste die *Tangente* nimmt; allein diese *Tangente* hat eine Lage, welche der Lage einer *Tangente* unter 90° entgegen gesetzt ist.

§. 14.

Aehnliche Betrachtungen zeigen, daß auch überhaupt seyn werde:

$$\text{cot. } \alpha' = - \text{cot. } (180^\circ - \alpha')$$

oder die *Cotangente* eines Winkels, der größer als 90° ist, wird bestimmt, wenn man den gegebenen Winkel von 180° abzieht, und vom Reste die *Cotangente* sucht, dabey aber auf die Verschiedenheit der Lage mit siehet.

Ferner ist leicht einzusehen, daß auch folgende Sätze ihre Richtigkeit haben:

$$\text{cot. } 0^\circ = \text{cot. } 180^\circ = \infty$$
$$\text{cot. } 90^\circ = 0.$$

§. 15.

Wir halten es nicht für nöthig, uns eben so weitläuftig über die Eigenschaften der Secanten, Cosecanten, Sinus versus und Cosinus versus zu erklären. Derjenige, welcher die vorigen §§ gehörig durchgedacht hat, wird leicht die Anwendung davon, auch auf die übrigen Hülfslinien zu machen im Stande seyn. Uebrigens kommen diese auch im Gebrauche weniger vor, und lassen sich, wie wir es in der Folge zeigen werden, beynahe immer vermeiden.

Aus dem was wir zu Ende des §. 11. festgesetzt haben, folgt endlich auch, weil $\alpha' = 90^\circ + \beta'$ ist,

	$\text{cos}.(90^\circ + \beta') = - \text{sin}.\beta'$
$\text{sin}.(90^\circ + \beta') = + \text{cos}.\beta'$	$\text{cos. vers}.(90^\circ + \beta') = + \text{sin. vers}.\beta'$
$\text{tang}(90^\circ + \beta') = - \text{cot}.\beta'$	$\text{cot}(90^\circ + \beta') = - \text{tang}\beta'$
$\text{sec}.(90^\circ + \beta') = - \text{cos}.\beta'$	$\text{cosec}.(90^\circ + \beta') = + \text{sec}.\beta'$

und

und es ist leicht, alle diese Lehrsätze, in Worten auszudrucken; so sagt zum Beyspiel der zweyte Satz eben so viel, als: die *Tangente* eines Winkels über 90° wird gefunden, wenn man die *Cotangente* des Ueberschusses des gegebenen Winkels über 90° in umgekehrter Lage nimmt: Eine ähnliche Bewandtniß hat es mit allen übrigen dieser Ausdrücke.

Berechnung der Hülfslinien.

§. 16.

Wir wollen nunmehro zur wirklichen Berechnung der Hülfslinien fortgehen, und ihr Verhältniß zum Halbmesser ihres Kreises zu bestimmen lehren. In dieser Absicht bemerken wir: daß einige derselben unmittelbar aus der niedern Meßkunst hergeleitet werden können, andere hingegen mit mehrern Umständen erst aus diesen gefunden und abgeleitet werden müssen. Wir wollen dieses hier umständlich entwickeln, und nach und nach die Lehrsätze beybringen, welche wir in dieser Absicht gebrauchen.

Den *Sinus* von 30 Graden zu finden.

§. 17.

Wir haben schon oben §. 3. gezeigt, daß überhaupt gefunden werde $\sin.\ \alpha = \frac{1}{2}$ chord. $2.\alpha$; setzen wir nun $\alpha = 30°$, so erhalten wir $\sin.\ 30° = \frac{1}{2}$ chord. 60°. Erinnern wir uns daher aus der Meßkunst, daß der Halbmesser eines Kreises sich im Umkreise genau 6mal herumtragen lasse, folglich, daß, weil 360° durch 6 getheilt, 60° geben, die Sehne von 60° dem Halbmesser des Kreises gleich sey, worinnen die Sehne ist gezogen worden, so folgt, daß, wenn wir den Halbmesser des Kreises gleich r setzen, chord. $60° = r$, mithin auch $\sin.\ 30° = \frac{1}{2}\,r$ gefunden werde.

Anmer-

Anmerkung. Da überhaupt alle Hülfslinien durch den Halbmesser ihres Kreises ausgedruckt werden müssen, indem man das Verhältniß dieser Hülfslinien zum Halbmesser des Kreises bestimmt, so ist hier der Halbmesser gleichsam die Einheit, worauf sich alles bezieht. Man kann daher für den Halbmesser auch jede beliebige Zahl annehmen. Weil es nun aber immer am einfachsten ist, wenn man eine Größe, die zum Maaßstabe anderer Größen dienen soll, durch die Einheit ausdruckt, und die andern Größen, so davon abhangen, in Theilen dieser Einheit bestimmet, so werden wir dieses auch hier in der Folge beobachten.

Nach dieser Voraussetzung erhalten wir jetzt einfacher und besser sin. $30° = \frac{1}{2}$.

Wird daher der Halbmesser oder die Einheit in zehen Millionen Theile zerfällt, so kann man auch setzen sin. $30° = 0,5000000$, indem man wirklich die Einheit oder 1 durch 2 theilet, und, weil nach den Zehentheilchen bis zu den zehen Millionen Theilchen weiter nichts kommt, die leeren Stellen allenthalben mit Nullen ausfüllt.

Dieses erkläret nun die Art und Weise, nach welcher man alle Hülfslinien in den Tabellen angegeben hat; sie beziehen sich nemlich alle auf einen in 10000000 gleiche Theile zerfällten Halbmesser, den man als die Einheit betrachtet. Wir werden daher in der Folge, nachdem wir einen Ausdruck für eine gesuchte Hülfslinie in r gefunden haben, immer $r = 1$ annehmen, um diese Hülfslinie so zu bestimmen, wie sie in den bereits berechneten Tabellen angegeben ist.

Den *Sinus* von 45° zu bestimmen.

§. 18.

Setzen wir in den allgemeinen Ausdruck sin. $\alpha = \frac{1}{2}$ chord. 2α, für α 45°, so ergiebt sich sin. 45° $= \frac{1}{2}$ chord. 90°. Man muß daher, um den Sinus von 45° zu finden, zuförderst die Sehne von 90°

 berech-

berechnen. Da diese nun nichts anders ist, als die schiefe Seite eines rechtwinklichten Dreyeckes, dessen beyde lothrechte Seiten, Halbmesser des Kreises sind, so wird, zufolge des Pythagorischen Lehrsatzes, chord. $90^\circ = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2\,r^2}$, mithin sin. $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2\,r^2}$, oder, indem wir $r = 1$ setzen, sin. $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Da nun $\sqrt{2} = 1,4142136$ gefunden wird, so ist auch sin. $45^\circ = 0,7071068$.

Den *Sinus* von 18° zu berechnen.

§. 19.

Hier müssen wir in den allgemeinen Ausdruck, dessen wir uns schon in den vorigen §§ bedient haben, für α den Bogen oder Winkel von 18° annehmen, denn so erhalten wir sin. $18^\circ = \frac{1}{2}$ chord. 36°. Es kommt demnach hier alles darauf an, die Sehne von 36 Grad zu finden; nun ist die Sehne von 36° nichts anders als die Seite eines im Kreise eingeschriebenen ordentlichen Zeheneckes. Ich könnte mich daher hier unmittelbar auf den ersten Heft meines Taschenbuches beziehen, wo ich im §. 453. die Einschreibung eines ordentlichen Fünf- und Zehnecks in einen beliebigen Kreis gezeigt und erwiesen habe. Damit aber für diejenigen, so diesen ersten Heft nicht besitzen, hier auch gesorget werde, so wollen wir noch kürzlich das zu beobachtende Verfahren erklären:

Es sey demnach Fig. 2 der Halbkreis FAG mit einer beliebigen Oeffnung des Zirkels FH beschrieben, und auf dessen Durchmesser FG der Halbmesser AH im Mittelpunkte H des Kreises senkrecht errichtet; man theile FH bey I in zwey gleichen Theilen, und beschreibe mit der Oeffnung IA aus I den Kreisbogen AK bis an FG in K, so wird HK die gesuchte Seite

Seite des Zehenecks seyn, und wenn man AK ziehet, so ist auch diese Linie die Seite eines ordentlichen in eben den Kreis einzuschreibenden Fünfeckes.

Es ist demnach jetzt leicht, die Seite des ordentlichen Zehnecks HK oder die Sehne von 36° zu finden, denn da $IH = \frac{1}{2} FH = \frac{1}{2} r$ und $AH = r$ ist, so wird $IA^2 = AH^2 + IH^2 = r^2 + \frac{1}{4} r^2 = \frac{5}{4} r^2$ oder $IA = \frac{1}{2} r \sqrt{5}$. Nun ist aber $IA = IK$ folglich $HK = IA - IH$ oder $HK = \frac{1}{2} r \sqrt{5} - \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1.)$

Setzt man daher oben diesen letzten Werth statt chord. 36°, so wird

$$\sin. 18° = \tfrac{1}{4} r (\sqrt{5} - 1)$$

oder, indem $r = 1$ gesetzt wird, noch einfacher $\sin. 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1.)$ Es ist aber $\sqrt{5} = 2,2360680$, mithin $\sqrt{5} - 1 = 1,2360680$, folglich $\sin. 18° = 0,3090170$.

Da $HK = 2 \sin. 18°$, so ergiebt sich $HK = 0,6180340$ und $HK^2 = 0,3819660$; da nun $AH^2 = 1$, so muß auch $AK^2 = 1,3819660$ und $AK = 1,1755706$ seyn.

Den *Sinus* von 36° zu berechnen.

§. 20.

Da $\sin. 36° = \frac{1}{2}$ chord. 72° seyn muß, und die Sehne von 72° der Seite eines ordentlichen in eben dem Kreise eingeschriebenen Fünfeckes gleich ist, so darf nur der Werth, den wir im vorigen § für AK gefunden haben, halbirt werden, um den Sinus von 36° zu erhalten. Es wird demnach $\sin. 36° = 0,5877853$.

§. 21.

Nachdem wir nunmehro gezeigt haben, wie man die Sinus von den Bögen oder Winkeln 18°, 30°.

36° und 45° finden könne; so ist es nun auch leicht, die Cosinus eben dieser Bögen zu bestimmen. In der Absicht bemerken wir, nach Anleitung Fig. 1, daß CDBG ein Rechteck, mithin DC = BG = cos. α sey; da nun überdem das Dreyeck BDC bey D recht winklicht und BD = sin. α ist, so wird überhaupt $BD^2 + DC^2 = BC^2$ oder $\overline{\sin.\alpha}^2 + \overline{\cos.\alpha}^2 = r^2$ oder das Quadrat des *Sinus* eines Bogens, mit dem Quadrate seines *Cosinus* zusammengenommen, ist dem Quadrate des Halbmessers gleich.

Aus dem letzten Ausdruck folgt unmittelbar $\cos.\alpha = \sqrt{r^2 - \sin.\alpha^2}$ oder, wenn r = 1 angenommen wird, bloß $\cos.\alpha = \sqrt{1 - \sin.\alpha^2}$ oder, wenn der Halbmesser des Kreises Eins ist, so wird der *Cosinus* eines Bogens erhalten, wenn man den *Sinus* desselben quadrirt, das Quadrat von 1 wegnimmt, und aus dem Reste die Quadratwurzel zieht.

Da nun sin. 30° = 0, 5 ist, so wird $\overline{\sin.30}^2 = 0,25$, mithin $1 - \overline{\sin.30}^2 = 0,75$, folglich ergiebt sich $\cos.30° = \sqrt{0,75} = 0,8660254$. Auf eine ähnliche Art ergiebt sich cos. 36° = 0,8090170 und cos. 18° = 0,9510565. Der Cosinus von 45° braucht nicht auf eben die Art gesucht zu werden, weil man leicht einsehen kann, daß, sobald der Bogen AB Fig. 1 gleich 45° wird, auch BD = DC = BG, mithin cos. 45° = sin. 45° = 0,7071068 seyn müsse.

§. 22.

Bemerken wir daher nach §. 7., daß cos. 30° = sin. (90° — 30°); cos 36° = sin. (90° — 36°) = sin. 54°; cos. 18° = sin. (90° — 18°) = sin. 72°.

und

und umgekehrt $\cos. 60° = \sin. (90° - 60°) = \sin. 30°$; $\cos. 54° = \sin. (90° - 54°) = \sin. 36°$; und $\cos. 72° = \sin. (90° - 72°) = \sin. 18°$ gefunden werden, so werden wir leicht gewahr, daß wir bis jetzt schon die Sinus und Cosinus von den Bögen 18°. 30°. 36°. 45°. 54°. 60°. 72° zu berechnen im Stande sind.

Es entstehet daher nunmehr die Frage: wie man aus diesen wenigen Sinus und Cosinus, die Sinus und Cosinus anderer Bögen oder Winkel berechnen könne, und hierzu giebt uns folgende Aufgabe fernere Anleitung.

§. 23.

Aus den gegebenen *Sinus* und *Cosinus* zweener Bögen oder Winkel, die *Sinus* und *Cosinus* von der Summe oder dem Unterschiede der beyden Bögen oder Winkel zu berechnen.

Es seyn daher, Fig. 3, $AB = \alpha$, und $BE = \beta$ die zwey Bögen, deren Sinus und Cosinus gegeben worden. Man ziehe folglich von A und B nach C die geraden Linien AC und BC, und fälle auf dieselben von B und E die senkrechten Linien BD und EG, so sind $BD = \sin. \alpha$, $DC = \cos. \alpha$, $EG = \sin. \beta$ und $GC = \cos. \beta$ gegebene Größen. Wird nun BE von B gegen A bis in F zurückgetragen oder $BF = BE = \beta$ genommen, welches geschiehet, indem man EG bis in F verlängert, so wird $AE = \alpha + \beta$ und $AF = \alpha - \beta$; zieht man daher von E und F die Lothe EI und FM, so sind $EI = \sin. (\alpha + \beta)$, $IC = \cos. (\alpha + \beta)$, $FM = \sin (\alpha - \beta)$ und $MC = \cos. (\alpha - \beta)$ die hier gesuchten Größen.

Um diese zu bestimmen, bemerken wir, daß, wenn von G auf EI und AC die Linien GL und GH, auf GH aber von F die Linie FK senkrecht gezogen werden, $HI = GL$, $MH = FK = GL$, $FM = KH$, $GK = EL$ und $LI = GH$ sey. Dieses alles folget

sehr leicht, wenn man nur erwäget, daß FMHK, GHIL Rechtecke, EGL und GFK ähnliche und gleiche Dreyecke sind; welches man auch leicht einsehen wird, wenn man nur bemerkt, daß FM, KH, GH, LF sämmtlich auf AC senkrecht stehen und unter einander gleich laufen, überdem aber auch FK auf GH und GL auf EF senkrecht gezogen, und untereinander gleichlaufend sind.

Diese Bemerkung giebt uns nun unmittelbar

$$EI = LI + EL = GH + EL$$
$$FM = KH = GH - GK = GH - EL$$
$$IC = HC - HI = HC - GL$$
$$MC = HC + MH = HC + GL$$

Wir ersehen folglich hieraus, daß, um die Linien EI, FM, IC und MC zu bestimmen, alles bloß darauf ankömmt, die vier Linien GH, EL, HC und GL aus den gegebenen Größen zu finden.

Um diese zu bestimmen, haben wir nun wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke BCD und GCH folgende Proportionen:

$$BC : BD = GC : GH \text{ und}$$
$$BC : DC = GC : HC$$

oder indem wir BC = r setzen, und statt BD, DC und GC die obengefundene Ausdrücke nehmen:

$$r : \text{sin. } \alpha = \text{cos. } \beta : FH$$
$$r : \text{cos. } \alpha = \text{cos. } \beta : HC$$

Demnach wird $GH = \frac{\text{sin. } \alpha . \text{ cos. } \beta}{r}$ und $HC = \frac{\text{cos. } \alpha . \text{ cos. } \beta}{r}$ gefunden.

Es sind aber auch die Dreyecke BCD und GEL einander ähnlich; denn sie sind bey D und L rechtwinklicht, und da DBC = HGC = 90° — CGL = LGE, so hat das erste Dreyeck zwey Winkel, die

stück-

stückweise zween Winkeln des andern gleich sind. Hieraus ergiebt sich nun

$$BC : BD = EG : GL \text{ und}$$
$$BC : DC = EG : EL$$

oder

$$r : \sin.\ \alpha = \sin.\ \beta : GL$$
$$r : \cos.\ \alpha = \sin.\ \beta : EL$$

und folglich $GL = \frac{\sin.\alpha.\sin.\beta}{r}$ und $EL = \frac{\cos.\alpha\ \sin.\beta}{r}$.

Wir haben demnach nunmehr die gesuchten vier Linien GH, EL, HC und GL durch lauter bekannte Grössen ausgedruckt und können daraus jezt die vier gesuchten Linien EI, FM, IC, und MC leicht zusammensetzen. Dieses giebt uns nun, wenn wir diese leztere vier Linien zugleich durch die oben bemerkte Ausdrücke angeben, und den Halbmesser r = r annehmen, folgende vier allgemeine Formeln, welche eben so viele trigonometrische Lehrsätze enthalten.

1) $\sin.(\alpha + \beta) = \sin.\alpha.\cos.\beta + \cos.\alpha.\sin.\beta$
2) $\sin.(\alpha - \beta) = \sin.\alpha.\cos.\beta - \cos.\alpha\ \sin.\beta$
3) $\cos.(\alpha + \beta) = \cos.\alpha.\cos.\beta - \sin.\alpha.\sin.\beta$
4) $\cos.(\alpha - \beta) = \cos.\alpha.\cos.\beta + \sin.\alpha.\sin.\beta$

§. 24.

Die vier Formeln des vorigen §. sind von mannigfaltigem Gebrauche in der Dreyeck-Meßkunst; hier wollen wir sie vorzüglich dazu anwenden, um zu zeigen, wie man aus den bis jezt berechneten Sinus und Cosinus der in §. 22. angegebenen Winkeln, die Sinus und Cosinus anderer Winkel berechnen könne. Betrachten wir nur mit ein wenig Aufmerksamkeit die obigen Formeln, so erhellet so gleich, daß die zwote von der ersten, und die vierte von der dritten bloß in den Zeichen verschieden sind, wodurch die Glieder

rechter Hand des Gleichungs-Zeichen mit einander verbunden worden.

Setzen wir nun hier $\alpha = 30°$ und $\beta = 18°$, so erhalten wir

$\sin. 48° = \sin. 30° \cos. 18° + \cos. 30° \sin. 18°$
$= \cos. 42°.$

$\sin. 12° = \sin. 30°. \cos. 18° - \cos. 30° \sin. 18°$
$= \cos. 78°.$

$\cos. 48° = \cos. 30°. \cos. 18° - \sin. 30°. \sin. 18°$
$= \sin. 42.$

$\cos. 12° = \cos. 30° \cos. 18° + \sin. 30°. \sin. 18°$
$= \sin. 78.$

und da $\sin. 30° \cos. 18° = 0,47552825$ und $\cos. 30° \sin. 18° = 0,26761655$ gefunden werden, so ergiebt sich $\sin. 48° = \cos. 42° = 0,7431448$ und $\sin. 12° = \cos. 78° = 0,2079117$; und auf eben die Art erhält man $\cos. 48° = \sin. 42° = 0,6691306$ und $\cos. 12° = \sin. 78° = 0,9781476$. Demnach findet man durch dieses Verfahren die Sinus und Cosinus von den vier Winkeln 48°. 12°. 42° und 78°.

§. 25.

Nehmen wir hingegen $\alpha = 36°$ und $\beta = 30°$, so erhalten wir auf eben die Art die Sinus und Cosinus von den vier Winkeln 66° 6°, 24° und 84°.

Wird $\alpha = 45°$ und $\beta = 30$ angenommen, so findet man, mittelst der beyden ersten Formeln die Sinus und Cosinus der beyden Winkel von 75° und 15.°

Setzen wir hingegen $\alpha = 45°$ und $\beta = 18°$, so erhalten wir durch die nemlichen Formeln die Sinus und Cosinus von 63° und 27°.

Auf eben die Art erhalten wir auch die Sinus und Cosinus von 81° und 9°, wenn wir $\alpha = 45°$ und $\beta = 36°$ annehmen.

Würde

Würde hingegen $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 27^\circ$ angenommen, so entspringen daraus mittelst der obigen vier Formeln, die Sinus und Cosinus von den Winkeln 57°, 3°, 33° und 87°.

Nehmen wir endlich $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 9^\circ$ an, so erhalten wir durch ein völlig ähnliches Verfahren, die Sinus und Cosinus von 39°, 21°, 51° und 69°.

Sehen wir nun gehörig nach, von welchen Winkeln wir bis jetzt die Sinus und Cosinus zu berechnen im Stande sind, so finden wir folgende Bögen der Ordnung nach

3°. 6°. 12°. 15°. 18°. 21°. 24°. 27°. 30°. 33°. 36°. 39°. 42°. 45°. 48°. 51°. 54°. 57°. 60°. 63°. 66°. 69°. 72°. 75°. 78°. 81°. 84°. 87°. 90.

das will sagen: wir sind jetzt im Stande alle Sinus und Cosinus durch den ganzen ersten Viertheil des Kreises von 3° zu 3° zu berechnen. Sind diese aber einmal gefunden, so lassen sich auch zufolge §. 12. die Sinus und Cosinus von 90° bis 180° ebenermassen von 3° zu 3° leicht angeben; denn so werden zum Beyspiel

$\sin. 93^\circ = \sin. (180^\circ - 93^\circ) = \sin. 87^\circ$ und
$\cos. 93^\circ = -\cos. (180^\circ - 93^\circ) = -\cos. 87^\circ$ gefunden.

§. 26.

Es bleibet uns nun noch übrig zu zeigen, wie man aus dem berechneten Cosinus von 3 Graden, welches der kleinste Bogen von denen ist, für welche die Sinus und Cosinus nach Anleitung des vorigen §. berechnet werden können, und der sich $= 0{,}9986295$ findet, die Sinus und Cosinus noch kleinerer Bögen berechnen könne, und hiezu dienet folgende Aufgabe:

Aus dem gegebenen *Cosinus* eines Bogens oder Winkels, den *Sinus* und *Cosinus* von der Hälfte dieses Bogens oder Winkels zu finden.

Es sey Figur 4, AB der Bogen, dessen Cosinus DC gegeben, so vollende man den Halbkreis ABI, davon AB ein Theil ist, und ziehe von B nach den Endpunkten A und I des Durchmessers AI die geraden Linien BA, BI durch den Mittelpunkt C aber mit BI die gleichlaufende Linie CF, so theilet diese den Bogen AB bey F und die Sehne AB dieses Bogens bey E in zween gleiche Theile, dergestalt, daß, wenn wir den Bogen AB $= \alpha$ setzen DC $= \cos.\ \alpha$, AEB $=$ chord. α, AF $=$ FB $= \frac{1}{2}\alpha$, AE $=$ EB $= \sin.\ \frac{1}{2}\alpha$ und EC $= \cos.\ \frac{1}{2}\alpha$ gefunden werden.

Nun sind die Dreyecke ABI und ADB ähnlich, denn beyde sind bey B und D rechtwinklicht und haben den Winkel A gemein, folglich wird

$$AI : AB = AB : AD:$$

mithin $AB^2 = AI.\ AD$ oder, weil $AI = 2\ r$ und $AD = AC - DC = r - \cos.\ \alpha$ ist, so wird auch $AB^2 = 2\ r\ (r - \cos.\ \alpha)$. Es ist aber auch $AB = 2.\ AE = 2 \sin\ \frac{1}{2}\alpha$, folglich $AB^2 = 4\ \overline{\sin.\ \frac{1}{2}\alpha}^2$ und dieses mit dem vorigen verbunden giebt die Gleichung $4\ \overline{\sin.\ \frac{1}{2}\alpha}^2 = 2\ r.\ (r - \cos.\ \alpha)$ oder $\sin.\ \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{r\left(\frac{r - \cos.\ \alpha}{2}\right)}$ oder wenn wir hier $r = 1$ setzen.

$$\sin.\ \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos.\ \alpha}{2}\right)}$$

und dies giebt die Regel: der *Sinus* des halben Bogens wird bestimmt, wenn man den *Cosinus* des ganzen Bogens von Eins abzieht, den Rest durch zwey theilet und aus den Quotienten die Quadrat-Wurzel zieht.

Es ist aber auch das Dreyeck ABI dem Dreyecke BID ähnlich, denn beyde sind bey B und D recht-

wink-

winklicht und haben den Winkel F gemein, demnach wird auch

$$AI : BI = BI : DI$$

und $BI^2 = AI, DI$, folglich, weil $AI = 2\,r$ und $DI = CI + CD = r + \cos.\,\alpha$ ist, $BI^2 = 2\,r\,(r + \cos.\,\alpha)$.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke AEC und ABF ist auch

$$AC : AI = EC : BI \text{ oder}$$

$$r : 2\,r = \cos.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha : BI$$

und hieraus $BI = 2\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha$, folglich $BI^2 = 4\,\overline{\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha}^{\,2}$. Vergleichen wir daher diesen letzten Ausdruck mit dem obigen, so wird

$$4\,\overline{\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha}^{\,2} = 2\,r\,(r + \cos.\,\alpha) \text{ gefunden.}$$

Dieser Ausdruck giebt nun $\cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{r\,(r + \cos.\,\alpha)}{2}\right)}$

und wenn wir $r = 1$ setzen, noch einfacher

$$\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos.\,\alpha}{2}\right)}$$

oder der *Cosinus* der Hälfte eines gegebenen Bogens wird bestimmt, wenn man den *Cosinus* des gegebenen Bogens zu Eins addirt, die Summe durch zwey theilet, und aus dem Quotienten die Quadrat-Wurzel zieht.

Diese und die vorige Regel sind sehr bequem, um die Sinus und Cosinus solcher Bögen zu berechnen, die kleiner als 3 Grad sind. Denn nehmen wir $\alpha = 3°$, so ist, wie wir es oben angegeben haben, $\cos.\,3° = 0{,}9986295$ und $1 - \cos.\,3° = 0{,}0013705$, mithin $\frac{1 - \cos.\,3°}{2} = 0{,}00068525$, folglich wird $\sin.\,1\tfrac{1}{2}° = \sqrt{0{,}00068525} = 0{,}0261769$ gefunden. Eben so ergiebt

ergiebt sich $1 + \cos. 3^\circ = 1,9986295$ und $\frac{1 + \cos 3^\circ}{2}$
$= 0,99931475$, mithin $\cos. 1\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{0,99931475}$
$= 0,9996573$.

Auf eben die Art, wie wir den Sinus und Cosinus von 1°. 30′ aus dem Cosinus von 3° berechnet haben, können wir auch den Sinus und Cosinus von $\frac{3}{4}$ Grad oder 45′ durch den Cosinus von 1° 30′ berechnen, und indem wir eben so weiter gehen, so erhalten wir

cos. 3°.	0′.	0″.	0‴	=	0,9986295
cos. 1°.	30.	0.	0	=	0,9996573
cos. 0°.	45.	0.	0	=	0,9999143
cos. 0°.	22.	30.	0	=	0,9999786
cos. 0°.	11.	15.	0	=	0,9999947
cos. 0°.	5.	37.	30	=	0,9999986

und eben so finden sich folgende Sinus:

sin. 3°.	0′.	0″.	0‴	=	0,0523360
sin. 1°.	30′.	0.	0.	=	0,0261769
sin. 0°.	45′.	0.	0.	=	0,0130896
sin. 0.	22′.	30.	0.	=	0,0065449
sin. 0.	11.	15.	0.	=	0,0032725
sin. 0.	5.	37.	30.	=	0,0016363

§. 27.

Die drey letzten Sinus, so wir im vorigen §. gefunden haben, sind so beschaffen, daß immer der eine sehr nahe die Hälfte des vorhergehenden ist, eben so, wie dieses bey den Bögen statt findet, zu welchen sie gehören; dieses berechtiget uns, wenn man nur die Rechnung bis auf sieben Stellen eines zehntheilchen Bruches treiben will, den Schluß zu machen, daß bey dergleichen kleinen Bögen die *Sinus* sich eben so wie die Bögen selbst verhalten.

Dieser Satz giebt uns nun ein leichtes Mittel an die Hand, den Sinus von 15 Minuten oder $\frac{1}{4}$ Grad zu bestimmen, man schließe nemlich:

$$11'.\ 15''.: 15' = 0{,}0032725 : \sin.\ 15'$$

oder

$$3 : 4 = 0{,}0032725 : \sin.\ 15'$$

mithin $\sin.\ 15' = \frac{0{,}0032725 \times 4}{3} = 0{,}0043633.$

Nachdem der Sinus von 15′ berechnet ist, ergiebt sich leicht der Cosinus dieses Bogens nach §. 21., und wir finden $\cos.\ 15' = \sqrt{1 - \overline{\sin.\ 15^{o}}^{2}} = \sqrt{1 - 0{,}00001904} = \sqrt{0{,}99998090} = 0{,}9999905.$

§. 28.

Nun ist es leicht nach §. 23 den Sinus und Cosinus von 30′ zu berechnen, denn setzen wir daselbst $\alpha = \beta$, so wird nach 1°

$$\sin.\ 2\alpha = 2 \sin.\ \alpha .\cos.\ \alpha$$

$$\cos.\ 2.\ \alpha = \overline{\cos.\ \alpha}^{2} - \overline{\sin.\ \alpha}^{2} = (\cos.\ \alpha + \sin.\ \alpha)(\cos.\ \alpha - \sin.\ \alpha)$$

folglich, wenn $\alpha = 15'$ ist, so wird $2\alpha = 30'$ gefunden, mithin ergiebt sich $\sin.\ 30' = 2 \times 0{,}0043633 \times 0{,}9999905 = 0{,}0087265$, und da $\cos.\ 15' + \sin.\ 15' = 1{,}0043538$, $\cos.\ 15' - \sin.\ 15'$, aber gleich $0{,}9956272$ gefunden werden, so ist $\cos.\ 30' = 0{,}9999619.$

Wir haben demnach schon folgende Sinus und Cosinus der Ordnung nach gefunden.

sin. 15′ = 0,0043633	cos. 15′ = 0,9999905
sin. 30′ = 0,0087265	cos. 30′ = 0,9999619
sin. 45′ = 0,0130896	cos. 45′ = 0,9999143

Setzen wir daher in allen Formeln des §. 23 $\alpha = 1^{o}.\ 30'$, so wird

sin.

$\sin.\ (1^\circ.\ 30' + \beta) = \sin.\ 1^\circ.\ 30'.\ \cos.\ \beta + \cos.\ 1^\circ.\ 30'.\ \sin.\ \beta.$

$\sin.\ (1^\circ.\ 30' - \beta) = \sin.\ 1^\circ.\ 30.\ \cos.\ \beta - \cos.\ 1^\circ.\ 30'\ \sin.\ \beta.$

$\cos.\ (1^\circ.\ 30' + \beta) = \cos.\ 1^\circ.\ 30.\ \cos.\ \beta - \sin.\ 1^\circ.\ 30'.\ \sin.\ \beta.$

$\cos.\ (1^\circ.\ 30' - \beta) = \cos.\ 1^\circ.\ 30'\ \cos.\ \beta + \sin.\ 1^\circ.\ 30.\ \sin.\ \beta$

gefunden; nehmen wir daher nach und nach für β die Bögen von 15', 30, und 45' an, so finden wir

sin. 1°. 45' = 0,0305385	cos. 1°. 45' = 0,9995336
sin. 1°. 15' = 0,0218149	cos. 1°. 15' = 0,9997620
sin. 2°. 0' = 0,0348995	cos. 2°. 0' = 0,9993908
sin. 1°. 0, = 0,0174524	cos. 1°. 0' = 0,9998477
sin. 2°. 15' = 0,0392598	cos. 2°. 15' = 0,9992290

oder der Ordnung nach, wenn wir die schon gefundenen Hülfslinien sin. 1°. 30'; cos. 1°. 30 mitnehmen,

sin. 1°. 0 = 0,0174524	cos. 1°. 0' = 0,9998477
sin. 1°. 15' = 0,0218149	cos. 1°. 15' = 0,9997620
sin. 1°. 30' = 0,0261769	cos. 1°. 30' = 0,9996573
sin. 1°. 45, = 0,0305385	cos. 1°. 45' = 0,9995336
sin. 2°. 0' = 0,0348995	cos. 2°. 0' = 0,9993908
sin. 2°. 15' = 0,0392598	cos. 2°. 15' = 0,9992290

Nehmen wir nun $\beta = 1^\circ$, so findet sich aus der obigen ersten und dritten Formel

sin. 2°. 30' = 0,0436194, cos. 2° 30' = 0,9990482.

Endlich aber, indem wir $\beta = 1^\circ.\ 15'$ annehmen, eben so

sin. 2°. 45' = 0,0479781, cos. 2°. 45' = 0,9988484, mithin, da wir auch oben

sin. 3°. 0' = 0,0523360, cos. 3°. 0' = 0,9986295

gefunden haben, so sind dadurch alle Sinus und Cosinus bis 3 Grad der Ordnung nach von 15 zu 15 Minuten berechnet.

Wird

Wird daher in den Formeln des §. 23. für α der Bogen von 6°, davon schon oben Sinus und Cosinus gefunden sind, angenommen, so wird

$$\sin. (6° + \beta) = \sin. 6°. \cos. \beta + \cos. 6°. \sin. \beta.$$
$$\sin. (6° - \beta) = \sin. 6°. \cos. \beta - \cos. 6°. \sin. \beta.$$
$$\cos. (6° + \beta) = \cos. 6°. \cos. \beta - \sin. 6°. \sin. \beta.$$
$$\cos. (6° - \beta) = \cos. 6°. \cos. \beta + \sin. 6°. \sin. \beta.$$

und indem man in diesen Formeln für β, der Ordnung nach, alle Bögen von 0 bis 3 Graden, davon wir oben die Sinus und Cosinus angegeben haben, setzet, so ergeben sich alle Sinus und Cosinus von 3 bis 9 Graden von 15 zu 15 Minuten.

Verfährt man nun auf eben die Art, und setzt in den vorhin angeführten Formeln $\alpha = 12°$, wofür wir schon oben den Sinus und Cosinus gefunden haben, für β aber nach und nach die Bögen von 0 bis 3 Graden, so ergeben sich die Sinus und Cosinus aller Bögen von 9 bis 15 Graden von 15 zu 15 Minuten.

Man kann daher eben so weiter gehen und somit alle Sinus und Cosinus von 0 bis 45 Graden von 15 zu 15 Minuten berechnen, und sodann hat man auch alle Sinus und Cosinus von 45 bis 90 Graden von 15 zu 15 Minuten gefunden. Denn da $\sin. 46° = \cos. 44°$ und $\cos. 46° = \sin. 44°$ ist, so sind Sinus und Cosinus von 46° bekannt, sobald nur Sinus und Cosinus von 44° gegeben sind; eben so kann dieses aber auch für die übrigen Bögen von 45 bis 90 Graden behauptet werden.

Nachdem ich nunmehro hinlänglich gezeiget habe, wie man alle Sinus und Cosinus von 0 bis 90 Graden von 15 zu 15 Minuten hat finden können, so giebt uns dieses Verfahren einen Begrif, wie man, wenn man wollte, die Sinus und Cosinus auch von 10 zu 10 Minuten oder wohl gar von Minute zu Minute berechnen könne, und es bleibet uns nur noch übrig

zu

zu zeigen, wie, wenn einmal die Sinus und Cosinus aller Bögen von 0 bis 90 gefunden sind, alle übrige Hülfslinien daraus ferner haben berechnet werden können.

Die *Tangente* eines Bogens zu berechnen.

§. 29.

Um diese Aufgabe aufzulösen bemerken wir, daß Fig. 1. die Dreyecke CDB und CAE einander ähnlich sind, weil das erste bey D, das andere bey A rechtwinklicht ist, und beyde den Winkel bey C gemein haben. Wir können demnach schließen

$$CD : BD = AC : AE$$

oder da $CD = BG = \text{cos}.\ \alpha$, $BD = \text{sin}.\ \alpha$, $AC = r$ nach §. 21. gefunden worden, so wird

$$\text{cos}.\ \alpha : \text{sin}.\ \alpha = r : \text{tang}.\ \alpha$$

und $\text{tang}.\ \alpha = \frac{r.\ \text{sin}.\ \alpha}{\text{cos}.\ \alpha}$ oder, wenn wir $r = 1$ setzen

$$\text{tang}.\ \alpha = \frac{\text{sin}.\ \alpha}{\text{cos}.\ \alpha}$$

das will sagen: die *Tangente* eines Winkels wird gefunden, wenn man den *Sinus* des nemlichen Winkels durch den *Cosinus* desselben theilet.

Beyspiel. Es sey nach dieser Regel die Tangente von 2° zu berechnen, davon wir im vorigen §. den Sinus 0,0348995 und den Cosinus 0,9993908 gefunden haben, so wird $\text{tang}.\ 2^\circ = \frac{0{,}0348995}{0{,}9993908}$ $= 0{,}0349208$, und auf eben die Art können alle übrige Tangenten durch eine bloße Division gefunden werden, sobald nur vorher alle Sinus und Cosinus berechnet sind.

Die

Die *Secante* eines Bogens zu finden.

§. 30.

Die im vorigen §. bemerkte Aehnlichkeit der Dreyecke CDB, CAE giebt unmittelbar folgende Verhältnißgleichung:

$$CD : CB = CA : CE$$

oder $$\cos. \alpha : r = r : \sec. \alpha$$

und $\sec. \alpha = \frac{r^2}{\cos. \alpha}$; wird demnach $r = 1$ angenommen, so ist

$$\sec. \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha}$$

oder die *Secante* eines Bogens wird bestimmt, wenn man die Einheit durch den *Cosinus* des nemlichen Bogens theilet.

Beyspiel. Es sey die Secante von 18° zu berechnen, für welchen Bogen wir den Cosinus 0,9510565 gefunden haben, so ergiebt sich nach voriger Regel

$$\sec. 18° = \frac{1}{0,9510565} = 1,0514622.$$

Anmerkung. Da wir $\sec. \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha}$ gefunden haben, so wird auch $\cos. \alpha = \frac{1}{\sec. \alpha}$. Soll daher eine Größe mit der Secante eines Bogens vervielfältiget werden, so darf man nur eben diese Größe mit dem Bruch $\frac{1}{\cos. \alpha}$ vervielfältigen, das will sagen durch den Cosinus eben dieses Bogens theilen; soll hingegen eine Größe durch den Bruch $\frac{1}{\sec. \alpha}$ vervielfältiget werden, welches nichts anders ist, als eben diese Größe durch $\sec. \alpha$ getheilt, so sehen wir leicht aus dem zweyten Ausdruck, daß wir eben

dasselbe erhalten, wenn wir nur die gegebene Größe mit dem Cosinus des nemlichen Bogens vervielfältigen. Daher kommt es, daß die Secanten leicht in allen vorkommenden Fällen vermieden werden können; nemlich: man darf nur da, wo mit der *Secante* eines Bogens getheilet werden soll, mit dem *Cosinus* des nemlichen Bogens vervielfältigen.

Den *Sinus versus* eines Bogens zu bestimmen.

§. 31.

Diese Aufgabe ist sehr leicht aufgelöset, denn da AD = AC — DC ist, so wird, weil AD = sin. vers. α, AC = r und DC = BG = cos. α ist, sin. vers. α = r — cos. α gefunden; mithin haben wir in dem Fall, wo r = 1 angenommen wird

$$\text{sin. vers. } \alpha = 1 - \text{cos. } \alpha$$

oder der *Sinus versus* eines Bogens wird bestimmt wenn man den *Cosinus* des nemlichen Bogens von Eins abzieht.

Beyspiel. Wenn $\alpha = 30^\circ$, so ist cos α = 0,8660254 und somit sin. vers. 30° = 1 — 0 8660254 = 0,1339746.

Anmerkung. Man kann demnach die Mühe ersparen, eine eigene Tabelle für die Sinus versus der Bögen anzufertigen, weil sie so leicht aus den Cosinus der nemlichen Bögen gefunden werden können. Ueberdem so kommen die Sinus versus beym Gebrauch der Dreyeck Meßkunst sehr sparsam vor, und können, da wo es geschiehet, nach obigem Satz leicht durch die Cosinus der nemlichen Bögen ausgedruckt werden.

Die *Contangente* eines Bogens zu berechnen.

§. 32.

In dieser Absicht bemerken wir, daß die beyden Dreyecke CGB und CFH einander ähnlich sind, weil beyde

beyde bey G und F rechte Winkel, bey C aber einen Winkel gemein haben. Zufolge dieser Aehnlichkeit haben wir nun

$$CG : BG = CF : FH$$

oder da $CG = BD = \sin. \alpha$, $BG = \cos. \alpha$, $CF = r$ und $FH = \cot. \alpha$ ist, so ergiebt sich

$$\sin. \alpha : \cos. \alpha = r : \cot. \alpha$$

und hieraus ferner $\cot. \alpha = \frac{r. \cos. \alpha}{\sin. \alpha}$, oder wenn $r = 1$ ist

$$\cot. \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}$$

das will sagen: die *Cotangente* eines Bogens wird gefunden, wenn man den *Cosinus* dieses Bogens durch dessen *Sinus* theilet.

Beyspiel. Da bey 36° der Sinus 0,5877853, und der Cosinus 0,8090170 gefunden werden, so wird $\cot. 36^\circ = \frac{0,8090170}{0,5877853} = 1,3763819.$

Anmerkung. Da bey 45° der Sinus dem Cosinus gleich ist, so erhält man, $\cot. 45^\circ = \frac{\cos. 45^\circ}{\sin. 45^\circ} = 1$, woferne nemlich der Halbmesser des Kreises Eins angenommen wird. Da sich nun eben diese Betrachtung auch bey dem Ausdruck, den wir oben für die Tangente angegeben haben, anstellen läßt, so wird man leicht einsehen, daß überhaupt seyn werde, wenn wir den Halbmesser des Kreises Eins annehmen

$$\text{tang. } 45^\circ = \cot. 45^\circ = 1.$$

Die *Cosecante* eines Bogens zu berechnen.

§. 33.

Die im vorigen § bemerkte Aehnlichkeit der Dreyecke CGB und CFH leitet uns gerade zu auf folgende Verhältnißgleichung:

$$CG : CB :: CF : CH :$$

folglich, da $CG = BD = \sin.\,\alpha$, $CB = CF = r$ und $CH = \text{cosec.}\,\alpha$ ist, so wird auch

$$\sin.\,\alpha : r = r : \text{cosec.}\,\alpha$$

und $\text{cosec.}\,\alpha = \dfrac{r^2}{\sin.\,\alpha}$ gefunden; setzen wir daher $r = 1$, so ist

$$\text{cosec.}\,\alpha = \frac{1}{\sin.\,\alpha}$$

oder die *Cosecante* eines Bogens wird berechnet, wenn man Eins durch den *Sinus* desselben Bogens theilet.

Beyspiel. Da wir bey 30° den Sinus $\frac{1}{2}$ oder 0,5 gefunden haben, so ist auch cosec. 30° = 1, getheilt durch $\frac{1}{2}$, demnach genau 2 Ganze; eben dieses giebt der Ausdruck $\text{cosec. } 30° = \dfrac{1}{0,5} = 2{,}0000000$ an, so wie man gewöhnlich die Cosecante von 30 Graden in den größern Tabellen aufgeführt findet.

Anmerkung Hier findet eben dasselbe statt, was wir bereits §. 30. angemerket haben, nehmlich: es ist einerley, ob ich eine gegebene Zahl mit der Cosecante eines Bogens vervielfältige, oder durch den Sinus desselben Bogens theile, und eben so ist es gleich viel, ob ich eine gegebene Zahl durch die Cosecante eines gegebenen Bogens theile, oder mit dem Sinus dieses Bogens vervielfältige. Es können daher auch die Secanten und Cosecanten der Bögen bey der Auflösung der Dreyecke vermieden werden, da man immer, wo eine dergleichen Linie vorkommen sollte, mit dem Cosinus oder Sinus desselben Bogens die Rechnung machen kann, indem man bloß vervielfältiget, wo getheilet, und theilet, wo vervielfältiget werden muß. Dieses ist der Grund, warum diese Linien nicht zu Ende dieses Werkes sind angegeben worden, da wir den Platz zu wichtigere Absichten sparen mußten.

Den *Cosinus versus* eines Bogens zu bestimmen.

§. 34.

Da FG = CF — GC und FG = cos. vers. α, CF = r und GC = BD = sin. α ist, so wird cos. vers. α = r — sin. α oder, indem wir r = 1 setzen

$$\text{cos. vers. } \alpha = 1 - \text{sin. } \alpha$$

oder der *Cosinus versus* eines Bogens wird gefunden, wenn von Eins der *Sinus* des nemlichen Bogens abgezogen wird.

Beyspiel. Da wir oben den Sinus von 36° = 0,5877853 gefunden haben, so folgt cos. vers. 36° = 1 — 0,5877853 = 0,4122147.

§. 35.

Da nach §. 29. tang. $\alpha = \frac{\text{sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha}$ ist gefunden worden, nach §. 32. aber auch cot. $\alpha = \frac{\text{cos. } \alpha}{\text{sin. } \alpha}$ ist, so wird auch $\frac{\text{sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha} = \frac{1}{\text{cot. } \alpha}$, mithin tang. $\alpha = \frac{1}{\text{cot. } \alpha}$ und cot. $\alpha = \frac{1}{\text{tang } \alpha}$, folglich sind folgende Sätze richtig, wenn man den Halbmesser des Kreises Eins annimmt,

Die *Tangente* eines Bogens ist gleich Eins getheilt durch die *Cotangente* des nemlichen Bogens, und

Die *Cotangente* eines Bogens ist gleich Eins getheilt durch die *Tangente* desselben Bogens.

Man kann daher immer leicht die Cotangente eines Bogens durch die Tangente, und die Tangente hinwiederum durch die Cotangente ausdrucken, wenn man nur bey der Rechnung gerade das entgegengesetzte Verfahren beobachtet. Dieses Mittel ist in

vielen Fällen sehr bequem, man muß sich aber hüten, eben dieses auf die Sinus und Cosinus anzuwenden, da diese Linien von einander ganz anders abhängen, als die Tangenten von den Cotangenten: denn da nach §. 21.

$\text{cos.}\,\alpha = \sqrt{1 - \overline{\text{sin.}\,\alpha}^2}$ ist gefunden worden, so muß auch $\text{sin.}\,\alpha = \sqrt{1 - \overline{\text{cos.}\,\alpha}^2}$ seyn.

Da ferner $\text{sec.}\,\alpha = \frac{1}{\text{cos.}\,\alpha}$ und $\text{cosec.}\,\alpha = \frac{1}{\text{sin.}\,\alpha}$ gefunden worden, so ist auch $\frac{\text{sec.}\,\alpha}{\text{cosec.}\,\alpha} = \frac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\alpha} = \text{tang.}\,\alpha$, und $\frac{\text{cosec.}\,\alpha}{\text{sec.}\,\alpha} = \text{cot.}\,\alpha$ oder $\text{sec.}\,\alpha = \text{cosec.}\,\alpha.\,\text{tang.}\,\alpha$, welcher Ausdruck angiebt, wie die Secante, die Cosecante, und die Tangente eines nemlichen Bogens von einander abhängen.

§. 36.

Da $\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\alpha}$, so wird auch $\overline{\text{tang.}\,\alpha}^2 = \frac{\overline{\text{sin.}\,\alpha}^2}{\overline{\text{cos.}\,\alpha}^2}$ und $1 + \overline{\text{tang.}\,\alpha}^2 = 1 + \frac{\overline{\text{sin.}\,\alpha}^2}{\overline{\text{cos.}\,\alpha}^2}$ oder, indem man 1 mit $\overline{\text{cos.}\,\alpha}^2$ vervielfältiget und theilet, $1 + \overline{\text{tang.}\,\alpha}^2 = \frac{\overline{\text{cos.}\,\alpha}^2 + \overline{\text{sin.}\,\alpha}^2}{\overline{\text{cos.}\,\alpha}^2}$; erinnern wir uns nun, daß nach §. 21, $\overline{\text{cos.}\,\alpha}^2 + \overline{\text{sin.}\,\alpha}^2 = 1$ seyn muß, so erhalten wir $1 + \overline{\text{tang.}\,\alpha}^2 = \frac{1}{\overline{\text{cos.}\,\alpha}^2}$.

Nun

Nun ist aber auch $\text{sec.}\,\alpha = \frac{1}{\text{cos.}\,\alpha}$ und $\overline{\text{sec.}\,\alpha}^2 = \frac{1}{\overline{\text{cos.}\,\alpha}^2}$, mithin wird hieraus $\overline{\text{sec.}\,\alpha}^2 = 1 + \overline{\text{tang.}\,\alpha}^2$, und auf eben die Art findet sich $\overline{\text{cosec.}\,\alpha}^2 = 1 + \overline{\text{cot.}\,\alpha}^2$.

Anmerkung. Eben dasselbe, was wir jetzt gefunden haben, lässet sich auch aus der ersten Figur unmittelbar ableiten, und dienet den Zusammenhang zwischen der Secante und der Tangente oder der Cosecante und der Cotangente eines Bogens anzugeben. Denn da $CE^2 = AC^2 + AE^2$ und $CH^2 = CF^2 + FH^2$ ist, so wird, weil $CE = \text{sec.}\,\alpha$, $AC = CF = r = 1$, $AE = \text{tang.}\,\alpha$, $CH = \text{cosec.}\,\alpha$ und $FH = \text{cot.}\,\alpha$, auch $\overline{\text{sec.}\,\alpha}^2 = 1 + \overline{\text{tang.}\,\alpha}^2$ und $\overline{\text{cosec.}\,\alpha}^2 = 1 + \overline{\text{cot.}\,\alpha}^2$ wie oben gefunden.

Es lassen sich auf eine ähnliche Art, wie hier, noch mehrere Ausdrücke finden, wodurch der Zusammenhang der Hülfslinien bestimmt werden kann. Allein da dieses hier nicht umständlicher erörtert werden darf, ohne wider die Absicht zu verstoßen, welche ich mir bey diesem kleinen Werke vorgesetzet habe, so bin ich genöthiget jetzt die Erläuterungen über die Berechnung der Hülfslinien zu schließen, und diejenigen meiner Leser, welche mehr davon zu wissen begehren, auf den zweyten Heft meines Taschenbuches zu verweisen.

§. 37.

Aus dem bisher abgehandeltem ersehen wir genugsam, wie die Hülfslinien sämmtlich berechnet und in Tabellen gebracht werden können; allein wir werden auch zugleich gewahr, daß, wenn man sie auch nur bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches be-

rechnet annimmt, immer nochviel zu rechnen übrig bleiben müsse, wenn man sie zur Auflösung der Dreyecke unmittelbar gebrauchen wollte. Um uns hiervon deutlich zu überzeugen, wollen wir uns den Fall gedenken, daß eine gegebene Zahl, welche zum Beyspiel die Seite eines Dreyeckes ausdrucket, mit dem Sinus eines Winkels vervielfältiget, und das herauskommende Product durch den Sinus eines andern Winkels getheilet werden sollte, so sehen wir leicht, daß hier mit einer Zahl, die aus 7 Ziffern besteht, vervielfältiget, und mit einer ähnlichen Zahl getheilet werden müsse, und es ist klar, daß dieses keine geringe Arbeit ist, besonders, wenn sie oft für ähnliche Fälle wiederholet werden soll. Es lässet sich demnach mit Recht eine Abkürzung der Rechnung hier wünschen, und diese haben wir dem Schottländischen Baron Nepper zu danken, welcher sich überhaupt große Verdienste, der Dreyeck-Meßkunst wegen, erworben hat. Dieser große Mann erfand nemlich andere Zahlen, statt derjenigen, wodurch wir oben die Hülfslinien ausgedruckt haben, und verwandelte dadurch das beschwerliche Vervielfältigen und Theilen großer Zahlen in ein sehr einfaches Zusammenzählen oder Abziehen anderer Zahlen, welche nicht mehr Ziffern als die gegebenen Zahlen hatten, dergestalt, daß dadurch überhaupt alle Dreyecke, welche berechnet werden müssen, sehr bequem aufgelöset werden können. Diese wichtige Entdeckung, in Absicht der Eigenschaften der Zahlen, ist es nun, welche wir jetzt weiter auseinander setzen, und so umständlich, als es gegenwärtige Absicht erlaubt, erklären wollen.

Eigen=

Eigenschaften der Logarithmen.

§. 38.

Wenn wir eine beliebige Zahl mit sich selbst vervielfältigen, so nennen wir das Product, welches herauskommt, das Quadrat oder die zwote Potenz der Zahl; so wird, wenn wir 8 mit 8 vervielfältigen, das Product 64, das Quadrat oder die zwote Potenz von der Zahl 8 genannt. Macht man daher das Quadrat von einer Zahl nicht wirklich, sondern zeigt bloß an, daß es gemacht werden soll, so pflegt man dieses auch durch 8^2 anzuzeigen, so daß 8^2 eben so viel als 64 bedeutet, und denn pflegt man 8 die Wurzel, 2 den Exponenten und 64 die zwote Potenz zu nennen.

Wird hingegen das Quadrat oder die zwote Potenz von einer beliebigen Wurzel von neuem mit der Wurzel vervielfältiget, so entsteht die dritte Potenz; so wird, wenn wir das obige Beyspiel beybehalten $64 . 8 = 512$ die dritte Potenz von 8, und wenn wir wiederum dieses bloß anzeigen wollen, so drückt 8^3 eben so gut die dritte Potenz von 8 als die Zahl 512 aus, und nun heißt 8 die Wurzel, 3 der Exponent und 512 die dritte Potenz.

Da diese Schlüsse eben so weiter fortgesetzt werden können, so ist es nunmehr begreiflich, was die Ausdrücke 8^4, 8^5, 8^6 u. s. w., oder allgemeiner, indem wir uns unter a jede beliebige Zahl vorstellen, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 u. s. w. sagen wollen, und was wir unter der 2. 3. 4. 5. 6 u. s. w. Potenz einer Zahl verstehen müssen. Diese Einleitung reicht zu, um folgende Sätze richtig zu verstehen, wenn man noch bemerkt, daß dem zufolge, was ich eben vorhin gesagt habe,

8^2 eben so viel als 8. 8.
8^3 , , , , 8. 8. 8.
8^4 , , , , 8. 8. 8. 8.
8^5 , , , , 8. 8. 8. 8. 8.

und so weiter, oder allgemeiner
a^5 eben so viel als a. a. a. a. a. bedeute:

§. 39.

Wenn eine beliebige Zahl zu irgend einer Potenz erhoben, und dadurch eine neue Zahl bestimmt wird, so heißet der Exponent dieser Potenz: der Logarithmus der gefundenen Zahl.

Wird daher die nach Belieben angenommene Zahl 3 zur fünften Potenz oder zu 3^5 erhoben, so erhalten wir 243, mithin ist in diesem Fall 5 der Logarithmus von der Zahl 243. Man kann demnach sagen, 5 sey der Logarithmus von 243 oder 3^5, und so ist der Ausdruck $5 = \log. 3^5$ sehr verständlich, wenn wir nur statt log. Logarithmus lesen. Stellen wir uns daher unter a, m, und c jede beliebige Zahlen vor, so kann man behaupten, daß, wenn a^m oder die m^{te} Potenz von a der Zahl c gleich ist, oder wenn $a^m = c$ ist, ganz allgemein seyn werde, $m = \log. a^m = \log. c$. Da sich der Werth von c, bey einerley Werth von m, bloß nach dem Werthe von a richtet, so folgt: daß eine und eben dieselbe Zahl der Logarithmus verschiedener Zahlen seyn könne. Zum Beyspiele, da $2^2 = 4$, so ist hier $2 = \log. 4$, da aber auch $3^2 = 9$, so wird gleichermaßen $2 = \log. 9$, und weil $4^2 = 16$, so folgt eben so $2 = \log. 16$ u. s. w. Im ersten Fall gehört aber der $\log. 4 = 2$ zu einem Systeme, dessen Wurzel $= 2$; hingegen ist im andern Fall die Wurzel 3 und im dritten 4 u. s. w.; woraus genugsam erhellet, daß es eben so viele verschiedene Systeme von Logarithmen geben müsse, als man für die Wurzel einer Potenz verschiedene Werthe annehmen kann.

§. 40.

Da nach §. 38. $8^4 = 8.8.8.8.$ und $8^3 = 8.8.8$ gefunden wird, so ist $8^4 . 8^3 = 8.8.8.8.8.8.8 = 8^{4+3} = 8^7$ und nun ist $4+3$ oder $7 = \log. 8^4 . 8^3$. Nimmt man daher an, daß a. c, d, m und n jede beliebige Zahlen vorstellen können, so folgt, daß, wenn man nur die vorigen Schlüsse allgemeiner machet, und $a^m = c$, hingegen $a^n = d$ angenommen werden, auch seyn werde $a^m . a^n = a^{m+n} = c. d$ oder $m + n = \log. a^{m+n} = \log. c. d$, folglich da $m = \log. c$ und $n = \log. d$, so ergiebt sich

$$\log. c. d = \log. c. + \log. d.$$

oder der Logarithmus eines aus zween Factoren bestehenden Productes wird gefunden, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammenzählet.

Wird hingegen $8^5 = 8.8.8.8.8.$ durch $8^2 = 8.8$ getheilt, so wird $\frac{8^5}{8^2} = \frac{8.8.8.8.8}{8.8} = 8.8.8 = 8^3 = 8^{5-2}$, folglich, wenn wir diesen Satz allgemeiner machen, so ist auch $\frac{c}{d} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ und $m - n = \log. a^{m-n} = \log. \frac{c}{d}$ oder da $m = \log. c$ und $n = \log. d$ ist, so wird endlich

$$\log. \frac{c}{d} = \log. c - \log. d$$

oder der Logarithmus eines Bruches wird gefunden, wenn man den Logarithmus des Nenners vom Logarithmus des Zählers abzieht.

Anmerkung. Diese zwo Haupt-Eigenschaften der Logarithmen hängen, wie wir sehen, nicht von der Wurzel a des Systems ab, und passen daher zu jedem beliebigen System von Logarithmen.

§. 41.

§. 41.

Wenn in die gefundene Ausdrücke $\log. c.d =$ $\log. c + \log. d$ und $\log. \frac{c}{d} = \log. c - \log. d$ statt d auch c geschrieben wird, welches immer geschehen kann, da es uns frey stehet für d jede beliebige Zahl anzunehmen, so erhalten wir folgende:

1) $\log. c.c = \log. c + \log. c$ und

2) $\log. \frac{c}{c} = \log. c - \log. c$

und da $c.c = c^2$ $\log. c + \log. c = 2 \log. c$, $\frac{c}{c}$ $= 1$ und $\log. c - \log. c = 0$ ist, so wird

1) $\log c^2 = 2 \log. c.$

2) $\log. 1 = 0.$

Aus dem ersten fließet die Regel: der Logarithmus des Quadrates einer beliebigen Zahl ist dem Logarithmus der Wurzel, doppelt genommen, gleich.

Das letzte hingegen zeiget: daß der Logarithmus von Eins in jedem logarithmischen System, Nulle seyn müsse.

Nehmen wir $d = c^2$ an, so wird $\log. c.c^2 =$ $\log. c + \log. c^2$ oder da $c.c^2 = c^3$ und $\log. c^2$ eben $= 2 \log. c$ gefunden worden, so wird auch $\log. c^3$ $= \log. c + 2 \log. c$, oder kürzer

$$\log. c^3 = 3 \log. c$$

Wird hingegen nunmehro $d = c^3$ angenommen, so ergiebt sich eben so

$$\log. c^4 = 4 \log. c$$

und da es leicht ist, diese Schlüsse auf eine ähnliche Weise fortzusetzen, so wird auf eine ganz allgemeine Art $\log. c^m = m \log. c$ gefunden.

oder

oder der Logarithmus einer Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit dem Exponenten vervielfältiget.

§. 42.

Nehmen wir im vorigen § $c^2 = C$ an, so wird $c = \sqrt{C}$ und $\log. c^2 = \log. C$, folglich $\log. C = 2 \log. \sqrt{C}$ oder $\log. \sqrt{C} = \frac{1}{2} \log. C$, das will sagen: der Logarithmus der Quadrat-Wurzel einer Größe wird gefunden, wenn man den Logarithmus der gegebenen Größe halbirt.

Wird hingegen $c^3 = C$ genommen, so ist $c = \sqrt[3]{C}$ und $3 \log. c = \log. C$ oder

$$\log. \sqrt[3]{C} = \frac{1}{3} \log. C.$$

Auf eben die Art findet sich

$$\log. \sqrt[4]{C} = \frac{1}{4} \log. C$$

und auf eine ganz allgemeine Art.

$$\log. \sqrt[n]{C} = \frac{1}{n} \log. C$$

oder der Logarithmus der Wurzel einer beliebigen Zahl wird gefunden, wenn man den Logarithmus der Zahl mit dem Exponenten der Wurzel theilet.

§. 43.

Da man die Wurzelgrößen $\sqrt{C}$, $\sqrt[3]{C}$, $\sqrt[4]{C}$, und überhaupt $\sqrt[n]{C}$, auch der Ordnung nach, folgendermaaßen schreiben kann $C^{\frac{1}{2}}$, $C^{\frac{1}{3}}$, $C^{\frac{1}{4}}$ und allgemein, $C^{\frac{1}{n}}$ so folgt, nach Anleitung des vorigen §.

$$\log. C^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log. C$$

$$\log. C^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log. C$$

$$\log. C^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} \log. C$$

u. s. w.

$$\log. C^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log. C$$

und es ist klar, daß die Regeln des § 41 statt haben, der Exponente mag eine ganze oder gebrochene Zahl seyn, denn wird $m = \frac{1}{n}$ angenommen, so ergiebt sich daraus eben dasselbe, was wir hier ganz zuletzt gefunden haben.

§. 44.

Man ist ferner gewohnt, statt $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$ und überhaupt statt $\frac{1}{a^m}$, der Ordnung nach, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} und allgemein a^{-m} zu schreiben; haben wir uns daher nur einmal an diesen letzten Ausdrücken gewöhnt, und verbinden damit den richtigen Begrif, so folgt, daß nach dem, was wir §. 41. festgesetzt haben, auch seyn müsse

$$\log. \frac{1}{a^1} = \log. a^{-1} = -1.$$

$$\log. \frac{1}{a^2} = \log. a^{-2} = -2.$$

$$\log. \frac{1}{a^3} = \log. a^{-3} = -3.$$

$$\log. \frac{1}{a^4} = \log. a^{-4} = -4.$$

u. s. w.; allgemein aber wird

$$\log. \frac{1}{a^m} = \log. a^{-m} = -m.$$

Es gehöret demnach ein negativer Logarithmus immer zu einem Bruche, dessen Zähler die Einheit, der Nenner hingegen eine Potenz der zum Grunde gelegten Wurzel des logarithmischen Systemes ist, und dessen Exponent eben so viele positive Einheiten enthält als der Logarithmus negative.

So gehöret hier zum Beyspiele der negative Logarithmus — 3 zu dem Bruche $\frac{1}{a^3}$, dessen Zähler, = 1, der Nenner aber die dritte Potenz der zum Grunde gelegten Wurzel a des Systems ist, mithin da hier der Exponent = + 3 der Logarithmus hingegen — 3 ist, so folgt, daß der vorige Satz in seinem ganzen Umfange richtig sey.

§. 45.

Dieses sind ohngefähr die Gründe, worauf sich die sinnreiche Neppersche Erfindung der Logarithmen stützet, und ohne welche man in der Dreyeck-Meßkunst wenig zu leisten im Stande seyn würde. Da nun die Wahl der Wurzel des Systemes willkührlich ist, so nahm Nepper den Satz an; der Logarithmus von 1,0000000 solle 0, hingegen der Logarithmus von 0,9999999 solle 1 seyn, weil dieses System von Logarithmen sich bequemer als die übrigen berechnen lässet, und seine Absicht bloß zuerst dahin gieng, die Logarithmen zur Abkürzung der in der Dreyeck-Meßkunst vorfallenden Rechnungen zu gebrauchen. Es ist demnach, weil immer log. a = log. a^1 = 1 ist, bey dem Nepperschen System die Wurzel a = 0,9999999.

Man fand aber sehr bald, daß sich die Logarithmen auch bey andern Rechnungen mit großem Vortheile gebrauchen ließen, und da hierzu die Nepperschen Logarithmen nicht mehr so bequem waren, so

wählete

wählete man ein anderes System, darinnen die Wurzel a = 10 angenommen ist, weil sich dieses unter allen übrigen zu unserm Zahlengebäude, wo wir immer nach 10 zählen, am besten schicket. Dieses System von Logarithmen ist es nun, welches Briegg, Professor der Mathematik zu Oxford auf Nepers Anrathen wirklich berechnet hat, und dessen wir uns auch jetzt mit großem Vortheile bedienen, um weitläuftige und schwere Rechnungen in kurzer Zeit zu endigen. Es wird sich daher immer der Mühe verlohnen, dieses System von Logarithmen etwas umständlicher kennen zu lernen.

§. 46.

Da $\frac{10}{10} = \frac{10^1}{10^1} = 10^{1-1} = 10^0$ nach §. 40. gefunden wird und überdem $\frac{10}{10} = 1$ ist, so wird

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1000$$
$$10^4 = 10000$$

Demnach ist auch nach §. 41. in diesem Systeme

$$\log. 1 = \log. 10^0 = 0$$
$$\log. 10 = \log. 10^1 = 1$$
$$\log. 100 = \log. 10^2 = 2$$
$$\log. 1000 = \log. 10^3 = 3$$
$$\log. 10000 = \log. 10^4 = 4 \text{ u. s. w.}$$

Ferner ist

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001 \text{ u. s. w.}$$

demnach ist auch

$$\log. 0,1 = \log. 10^{-1} = -1.$$
$$\log. 0,01 = \log. 10^{-2} = -2.$$
$$\log. 0,001 = \log. 10^{-3} = -3.$$
$$\log. 0,0001 = \log. 10^{-4} = -4.$$

§. 47.

Geben wir auf die Ausdrücke des vorigen §. ein wenig Acht, so bemerken wir leicht folgendes Gesetz: Ein jeder Logarithmus in diesem Systeme enthält eben so viele Einheiten, als die Zahl, zu welcher er gehört, außer der Ziffer Eins, Nullen hat, und zwar sind die Einheiten des Logarithmus positiv, wenn die Nullen in der Zahl, die den Logarithmus entspricht, auf die Ziffer Eins folgen, hingegen aber negativ, wenn die Nullen der Ziffer Eins vorgehen.

Diese Eigenschaft findet nur allein bey dem Systeme von Logarithmen statt, wo die Wurzel 10 ist, und erlaubet uns für dieses System folgende Regel festzusetzen.

Wenn von einer Zahl, die bloß mit einer Eins und Nullen, welche ihr vor oder nachgehen, geschrieben ist, der Logarithmus verlangt wird, so zähle man die Anzahl der Nullen; die Zahl nun, welche diese Anzahl andeutet, ist der gesuchte Logarithmus, und zwar ist derselbe positiv, wenn die Nullen der Einheit folgen, gehen sie aber vor, so ist er negativ.

Frägt man daher, wie groß ist in dem Systeme, dessen Wurzel 10 ist, der Logarithmus von der Zahl 100000000000, so dienet zur Antwort + 11, weil 11 Nullen hier auf die Ziffer 1 folgen.

Würde hingegen der Logarithmus von 0, 0000001 verlangt, so wäre derselbe — 7, weil 7 Nullen der Ziffer 1 vorgehen, kehren wir aber die vorige Regel um, so entspringt daraus auch folgende:

Wenn zu einem Logarithmus, der durch eine ganze positive oder negative Zahl ausgedruckt ist, die zustimmende Zahl gesucht wird, so schreibe man die Ziffer 1, und setze, wenn der Logarithmus positiv ist, hinter derselben, eben so viele Nullen als der gegebene Logarithmus Einheiten hat; ist aber der Logarithmus negativ, so schreibe man vor der Ziffer 1, eben so viele Nullen als Einheiten im gegebenen Logarithmus angetroffen werden.

Sucht man daher die Zahl, welche den Logarithmus + 5 entspricht, so findet man, daß es die Zahl 100000 ist. Will man aber die Zahl wissen, dessen Logarithmus — 7 ist, so erhält man 0,0000001.

§. 48.

Da wir eben gesehen haben, daß dem zufolge, was wir im vorigen §. gefunden haben Logar. 1 = 0 und Log. 10 = 1 seyn muß, so folgt, daß für alle Zahlen zwischen 1 und 10. der Logarithmus größer als 0, und doch kleiner als 1 seyn werde, folglich haben alle Zahlen zwischen 1 und 10 einen echten Bruch zum Logarithmus, der immer durch 0 und mehrere zehentheilige Brüche ausgedruckt werden kann. Da ferner Log. 100 = 2, so müssen die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10 und 100 durch 1. und mehrere zehentheilige Brüche angegeben werden. Da nun dieses eben so weiter fortgehet, so bestehet jeder Logarithmus, dessen Zahl keine ganze oder gebrochene Potenz von 10 ist, aus zween Theilen, nemlich aus einer gewissen ganzen Zahl, und einem zehentheiligen Bruch, und da die ganze Zahl, so vor dem zehen-

theiligen

theiligen Bruch stehet, jederzeit anzeiget, zwischen welchen Potenzen von 10 die Zahl fället, deren Logarithmus gegeben worden, so wird diese ganze Zahl die Kennziffer des Logarithmus genannt.

Nun werden alle ganze Zahlen
zwischen 1 und 10, nur mit 1 Ziffer,
„ 10 und 100 „ „ 2 „
„ 100 und 1000 „ „ 3 „
„ 1000 und 10000 „ „ 4 „
und s. w. geschrieben.

Hingegen hat der Logarithmus einer Zahl zwischen 1 und 10 zur Kennziffer 0,
zwischen 10 und 100 zur Kennziffer 1,
„ 100 und 1000 zur „ 2,
„ 1000 und 10000 zur „ 3,
und s. w.

Hieraus folgt demnach, daß die Logarithmen aller Zahlen, wo die Ganzen nur durch eine Ziffer können ausgedruckt werden, zur Kennziffer 0 also 1 weniger haben, als die Anzahl der Ziffern groß ist, wodurch die Ganzen in der Zahl bestimmet werden.

Eben so haben die Logarithmen aller Zahlen, deren Ganze durch zwo Ziffern bestimmt werden, nur 1, und folglich wiederum 1 weniger als die Anzahl der Ziffern, welche die Ganze in der vorgegebenen Zahl bestimmen.

Da sich nun eben diese Betrachtung nach Belieben weiter fotsetzen läßt, so folgt überhaupt:

Die Kennziffer eines Logarithmus wird bestimmt, wenn man in der Zahl, die den Logarithmus entspricht, die Ziffern zählt, welche die Ganzen oder Einer in der Zahl ausdrücken, und die Anzahl derselben um Eins vermindert.

Beyspiel. Welche Kennziffer wird der Logarithmus der Zahl 17653,98 erhalten? Da hier die Ganzen oder Einer durch 5 Ziffern ausgedruckt sind,

so muß die gesuchte Kennziffer = 5 — 1 = 4 seyn, der zehentheilige Bruch des Logarithmus mag seyn, welcher er wolle.

Aus der letzten Regel folgt auch umgekehrt:

Die Anzahl der Ganzen oder Einer einer Zahl wird gefunden, wenn man die Kennziffer ihres Logarithmus um Eins vermehret.

Beyspiel. Es wird ein Logarithmus mit der Kennziffer 7 gegeben, man will wissen, durch wie viele Ziffern die Ganzen, oder Einer der Zahl, zu welcher der Logarithmus gehört, ausgedrückt werden müssen. Da nun 7 + 1 = 8 ist, so müssen hier die Ganzen oder Einer der Zahl, welche den gegebenen Logarithmus entsprechen soll, durch 8 Ziffern ausgedruckt werden, es mögen übrigens noch so viele zehentheilige Brüche darauf folgen, als nur immer wollen.

§. 49.

Da die beyden Regeln des vorigen §. nur für positive Kennziffern gelten, so wollen wir durch folgende Betrachtungen ähnliche Regeln für negative Kennziffern festsetzen.

Zuförderst können wir bemerken, daß ein jeder zehentheiliger Bruch, wie 0,987 . . . der sich auf der ersten Stelle mit einer bezeichnenden Ziffer, wie hier mit 9 anfängt, immer kleiner als Eins ist, daher auch die Kennziffer eines solchen Bruchs weder positiv, noch Nulle seyn kann, woraus folget, weil alle Kennziffern durch ganze Zahlen ausgedrückt werden müssen, und die gegebene Zahl, zwischen 0, 1 und 1 liegt, daß die Kennziffer eines solchen Bruchs, nicht anders als durch — 1 ausgedrückt werden kann.

Fängt hingegen eine Zahl, wie 0,0765 nur erst auf der zwoten Stelle mit einer bezeichnenden Ziffer, wie hier mit 7 an, so ist dieselbe immer kleiner als 0, 1; da nun nach §. 8. log. 0, 1 erst — 1 ist, so kann die

Kennziffer des Logarithmus der vorgegebenen Zahl noch nicht — 1 seyn. Da nun aber die Kennziffern nur ganze Zahlen seyn dürfen, so kann dieselbe keine andere Zahl als — 2 seyn.

Eben die Schlüsse lassen sich auf eben die Art weiter fortsetzen und daraus fließet sehr natürlich die Regel.

Wenn von einem zehentheiligen Bruche die Kennziffer des Logarithmus gefunden werden soll, so zähle man die Nullen, die der ersten bezeichnenden Ziffer vorgehen, und gebe der Kennziffer eben so viele negative Einheiten.

Beyspiel. Welche Kennziffer stimmet zur Zahl 0,000000865... Da hier der bezeichnenden ersten Ziffer, nemlich der 8, in allem 7 Nullen vorgehen, so ist die gesuchte Kennziffer = — 7.

Umgekehrt kann man auch, aus einem mit einer negativen Kennziffer versehenen Logarithmus, die Stelle finden, wo die bezeichnenden Ziffern, der den Logarithmus entsprechenden Zahl, anfangen müssen, als wozu folgende Regel dienet.

Wenn zu einem Logarithmus mit einer negativen Kennziffer die Zahl gefunden werden soll, und man will bestimmen, auf welcher Stelle der zehentheilige Bruch anfangen muß, so schreibe man vor den bezeichnenden Ziffern eben so viele Nullen, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmus hat, hinter der ersten Nulle, aber, wie gewöhnlich, das Comma.

Beyspiel. Auf welcher Stelle müssen die bezeichnenden Ziffern einer Zahl anfangen; deren Logarithmus = — 7 ist. Stellen wir uns nun unter a. b. c. d. und s. w. die bezeichnenden Ziffern der Zahl vor, so muß diese Zahl selbst durch 0,000000 a. b. c. d. ausgedrückt werden.

Die Regeln, welche wir in diesem und dem vorigen §. in Absicht der Kennziffern bestimmt haben,

finden nur allein bey demjenigen Systeme von Logarithmen statt, bey welchem die Wurzel der Potenz = 10 angenommen wird; bey andern Systemen lassen sich zur Bestimmung der Kennziffern nicht so einfache Regeln angeben, woraus wiederum erhellet, daß der Vorzug, den das logarithmische System, bey welchen die Wurzel 10 angenommen ist worden, in Absicht unseres gewöhnlichen Zahlengebäudes sehr wesentlich ist.

§. 50.

Der größte Vortheil dieses logarithmischen Systemes bestehet aber vorzüglich darinn, daß, wenn einmal in diesem Systeme ein Logarithmus für eine Zahl berechnet ist worden, welche aus einer bestimmten Anzahl bezeichnenden Ziffern besteht, eben dieser Logarithmus für unendlich viele andere Zahlen, die mit eben den bezeichnenden Ziffern geschrieben werden können, unverändert derselbe bleibt, wenn man nur die Kennziffer des Logarithmus nach eben dem Maaße ändert, als die Ziffern in jeder Zahl andere Werthe erhalten, welches aus folgenden Betrachtungen noch deutlicher erhellen wird.

Wir wollen annehmen, es sey der Logarithmus der Zahl 1728 berechnet, und der zehentheilige Bruch dieses Logarithmus durch p ausgedrückt, so ist der Logarithmus selbst, weil nach §. 10., die Kennziffer 3 seyn muß, $3, p = 3 + p$.

Will man nun den Logarithmus von 17280 haben, so bemerke man, daß da $17280 = 1728 . 10$, und nach §. 3. $\log. 1728 . 10 = \log. 1728 + \log. 10$, auch seyn werde, $\log. 17280 = 3 + p + , 1 = 4 + p$.

Hätte man hingegen den Logarithmus von 172800 verlangt, so wäre erstlich $172800 = 1728 . 100$, folglich, wenn §. 40. $c = 1728$, und $d = 100$ angenom-

genommen werden, $\log. 172800 = \log. 1728 + \log. 100 = 3 + p + 2 = 5 + p$.

Aehnliche Schlüsse lassen sich auf eben die Art weiter fortsetzen.

Wollte man hingegen von 172,8 den Logarithmus haben, so bemerke man, daß $172,8 = \frac{1728}{10}$. Setzt man nun §. 40. $c = 1728$, $d = 10$, so wird $\log. 172,8 = \log. 1728 - \log. 10 = 3 + p - 1 = 2 + p$.

Würde hingegen von 17,28 der Logarithmus verlangt, so wäre derselbe, weil $17,28 = \frac{1728}{100}$, gleich an $\log. 1728 - \log. 100 = 3 + p - 2 = 1 + p$.

Eben so würde $\log. 1,728 = \log \frac{1728}{1000} = \log. 1728 - \log. 1000 = 3 + p - 3 = p$ seyn.

Würde endlich der Logarithmus der Zahl 0,1728 verlangt, so ist $\log. 0,1728 = \log. \frac{1728}{10000} = \log. 1728 - \log. 10000 = 3 + p - 4 = p - 1$.

Auch hier lassen sich ähnliche Schlüsse so weit fortsetzen als man will.

Da nun 1728 = 1728,0 und auch 1728 = 1728,00, so bemerke man, daß 17280 aus 1728,0 entstehet, indem das Comma um eine Stelle gegen die rechte Hand fortgerücket wird. Hingegen wird 172800 aus 1728,00 gefunden, wenn man das Comma um zwo Stellen gegen die rechte Hand fortrücket. Im ersten Falle mußten wir die Kennziffer des log. 1728 um Eins vermehren, um daraus log. 17280 zu finden, im andern Falle aber um zwey, um daraus den Logarithmus 172800 zu erhalten.

Demnach mußte in beyden Fällen die Kennziffer des Log. 1728 um eben so viele Einheiten vermehret werden, als die Anzahl der Ziffern groß war, um welche das Comma gegen die rechte Hand versetzt werden mußte.

Durch eine ähnliche Betrachtung ergiebt sich, daß die Kennziffer des Log. 1728. um eben so viele Einheiten vermindert werden müsse, als die Anzahl der Ziffern groß ist, um welche das Comma gegen die linke Hand gerückt werden muß, um mit eben den bezeichnenden Ziffern mehrere andere Zahlen auszudrücken; woraus folgende allgemeine Regeln fließen.

Wenn der Logarithmus einer Zahl bekannt ist, und man will daraus den Logarithmus einer andern Zahl finden, die mit eben denselben bezeichnenden Ziffern geschrieben werden muß, so schreibe man vor oder nach der Zahl, deren Logarithmus bekannt ist, so viele Nullen, als zu jeder Absicht hinreichend erachtet werden, und bemerke, um wie viel Stellen das Comma nach hinten oder nach vorne fortgerückt werden müsse, um die Zahl zu erhalten, deren Logarithmus verlangt wird. Um so viele Stellen nun das Comma nach hinten hat fortgerückt werden müssen, um eben so viele Einheiten vermehre man die Kennziffer des bekannten Logarithmus, ist aber die Fortrückung nach vorne geschehen, so vermindere man die Kennziffer um eben so viel.

Umgekehrt läßt sich behaupten, wenn die Zahl bekannt ist, die zu einem gegebenen Logarithmus stimmet, und man will die Zahl finden, die zu eben demselben Logarithmus gehöret, wenn seine Kennziffer um eine gewisse Zahl vermehrt oder vermindert wird, so schreibe man im ersten Falle so viele Nullen als nöthig sind, hinter, im andern Falle aber vor der Zahl, deren Logarithmus gegeben ist, und versetze das Comma im ersten Fall, um eben so viele Stellen nach hinten,

im andern nach vorne, als die Zahl Einheiten hat, um welche die Kennziffer des gegebenen Logarithmus vermehrt oder vermindert ist worden.

Erstes Beyspiel. Wenn man weiß, daß der Logarithmus von 40754 durch 4,6101702 kann ausgedrückt werden, so frägt es sich, wie der Logarithmus von 4075400000000 ausgedrückt werden müsse.

Hier schreibe man hinter der Zahl 40754, bey welcher man sich ein Comma nach der letzten Ziffer 4 vorstellen muß, 9 Nullen, weil mehrere Nullen zu schreiben überflüßig wäre, und drücke diese Zahl demnach durch 40754,000000000 aus, und bemerke, daß, wenn das Comma jetzt um 9 Stellen gegen die rechte Hand oder nach hinten fortgerücket wird, die Zahl 4075400000000 herauskomme, davon der Logarithmus gesucht wird.

Man addire demnach zu der Kennziffer 4 des bekannten Logarithmus nach der ersten Regel dieses § neun Einheiten oder 9, so wird der gesuchte Logarithmus = 13,6101702, der nur in der Kennziffer von dem Log. 40754 = 4,6101702 verschieden ist.

Zweytes Beyspiel. Wie groß ist der Logarithmus von 0,0000000040754?

Hier schreibe man, weil es nöthig ist, vor der Zahl 40754, wo das Comma wiederum hinter der letzten 4 vorausgesetzet wird, 7 Nullen, oder drücke die Zahl 40754, durch 000000040754 aus, und bemerke nun, daß aus dieser Zahl die Zahl 0,0000000040754 gefunden wird, indem man das Comma um 11 Stellen nach vorne versetzet.

Man ziehe daher von der Kennziffer 4 des Logarithmus 4,6101702 der Zahl 40754 eilf Einheiten oder 11 ab, so kommt 4 — 11,6101702 = — 7,6101702, so wie dieses der ersten Regel des §. 49. gemäß ist, denn da bey der Zahl 0,0000000040754

den bezeichnenden Ziffern in allem nur 7 Nullen vorgehen, so folgt unmittelbar, die Kennziffer des Logarithmus dieser Zahl müsse — 7 seyn.

Uebrigens pflegt man auch zuweilen diesen Logarithmus durch 0,6101702 — 7 auszudrücken, da es im Grunde einerley ist, ob die — 7 vor oder nach dem zehentheiligen Bruch 0,6101702 geschrieben werde, welcher auch bey diesem Beyspiele noch unverändert eben denselben Werth behalten hat.

Drittes Beyspiel. Man weiß, daß zu dem Logarithmus 6,7125072 die Zahl 5158307 stimmet, man verlangt zu wissen, welche Zahl zu dem Logarithmus 11,7125072 gehöre, deren Kennziffer um 5 größer ist, als die Kennziffer 6 des gegebenen Logarithmus.

Da 5158307 = 5158307,0000000, so versetze man hier das Comma nach der 2ten Regel dieses §. um 5 Stellen gegen die rechte Hand, weil die Kennziffer des Logarithmus der gesuchten Zahl so viel Einheiten mehr als die Kennziffer des Logarithmus hat, dessen Zahl bekannt ist, so kömmt die Zahl 515830700000,00, oder der Logarithmus 11,712507 stimmet zu 515830700000.

Viertes Beyspiel. Welche Zahl stimmet zum Logarithmus — 7,7125072?

Da die Kennziffer — 7 gefunden wird, wenn man von 6, der Kennziffer des Logarithmus 6,7125072, zu welchem die Zahl 5158307 gehört, 13 abzieht, so schreibe man vor der Zahl 5158307 mehrere Nullen, als 0000000000000005158307, und verrücke das Comma nach der letzten Regel dieses §., welches man sich hinter der letzten Ziffer, wie hier hinter 7 geschrieben, vorstellen muß, um 13 Stellen gegen die linke Hand, so kommt 0000000000,0000005158307, welches nichts mehr als 0,0000005158307 saget, und diese ist demnach die gesuchte Zahl.

Die Anzahl der Nullen vor den bezeichnenden Ziffern hätte schon nach der letzten Regel, des §. 11. aus der gegebenen Kennziffer — 7 bestimmt werden können.

Diese wenigen Beyspiele werden hoffentlich deutlich genug den zu Anfang dieses §. behaupteten Satz bestätigen, daß ein und eben derselbe Logarithmus, zu eben so vielen Zahlen, die mit einerley bezeichnenden Ziffern geschrieben werden können, gehöre, als sich Veränderungen, mit der Kennziffer des Logarithmus vornehmen lassen.

§. 51.

Als eine Eigenschaft der Logarithmen können wir auch bemerken, daß negative Zahlen keine Logarithmen haben können, oder daß die Logarithmen von Negativ-Zahlen nur eingebildete Zahlen sind. Denn setzen wir §. 39. nach und nach $m = 1$ $m = 2$ und s. w. so wird nach und nach $c = a^1$, $c = a^2$ $c = a^3$, und folglich $\log. a^1 = 1$, $\log. a^2 = 2$ $\log. a^3 = 3$ u. s. w. Eben dieses erfolgt bey gebrochenen Exponenten.

Demnach sind alle positive Zahlen Logarithmen von Potenzen der Wurzel a, oder von Zahlen, die sämmtlich größer als 1 sind. Hingegen werden nach §. 7. alle negative Zahlen als — 1 — 2 — 3 u. s. w. Logarithmen, von eigentlichen Brüchen, die zwar kleiner als 1 sind, aber doch nicht negativ werden können.

Man muß daher, wenn man die Logarithmen zur Abkürzung solcher Rechnungen gebraucht, bey welchen negative Zahlen vorkommen, diese Zahlen so lange als positiv betrachten, als man mit Logarithmen rechnet, und nur zuletzt die nöthigen Betrachtungen anstellen, um zu bestimmen, welches Zeichen, die mittelst der Logarithmen gefundenen Zahlen erhalten müssen.

Berech-

Berechnung der Logarithmen.

§. 52.

Wenn der Logarithmus von einer bestimmten Zahl, in dem Systeme, dessen Wurzel = 10 ist, gefunden werden soll, so sehen wir leicht, nach Anleitung des §. 46., daß alles bloß darauf ankömmt, den Exponenten derjenigen Potenz zu finden, worauf die Wurzel 10 erhoben werden müsse, um genau die vorgegebene Zahl zu bringen, so daß, wenn wir diesen Exponenten x nennen, immer seyn muß $10^x = a$, wo a die Zahl vorstellt, wovon der Logarithmus eigentlich gesucht wird. Denn da alsdenn log. 10^x = log. a und nach §. 41. log. 10^x = x log. 10 = x, weil nach §. 46 log. 10 = 1 ist, so wird auch log. a = x.

So einfach aber dieses Verfahren scheinet, so beschwerlich lässet es sich ausführen. Um sich davon zu überzeugen, setze man, wir wollten geradezu den Logarithmus von der Zahl 2 finden, so sehen wir aus dem vorigen leicht, daß log. 2 = x seyn müsse, und nun haben wir, um x zu bestimmen, die Gleichung $10^x = 2$, das ist aber auch alles, und da kein Mittel vorhanden ist, aus dieser Gleichung, die gesuchte Größe x durch irgend ein Rechnungs-Verfahren gerade zu zu entwickeln, so lange wir noch keine Logarithmen als berechnet voraussetzen, so sehen wir, daß diese einfach scheinende Gleichung nicht so leicht aufzulösen ist, als man vielleicht glauben sollte.

Wir können indessen bemerken, daß, weil nach §. 45. log. 1 = 0 und log. 10 = 1 ist, der gesuchte Logarithmus von der Zahl 2 zwischen 0 und 1 fallen müsse. Um uns daher den Werth desselben zu nähern, so wollen wir umgekehrt aus den Logarithmen 0 und 1

andere Logarithmen suchen, welche zu Zahlen stimmen, die sich immer mehr und mehr der gegebenen Zahl 2 nähern, und sie endlich, so genau als nöthig, selbsten erreichen.

Da nun $1 = \log. 10$, so ist $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log. 10 = \log. 10^{\frac{1}{2}} = \log. \sqrt{10} = \log. 3,162278$, oder, da $\frac{1}{2} = 0,5$, so wird

$$0,5 = \log. 3,162278 = \log. a.$$

und wir kennen nunmehro die Größe des Logarithmen einer Zahl, die schon näher bey 2 ist, als es 1 und 10 waren.

Eben so findet man $\frac{0,5}{2} = \log. \sqrt{3,162278} = \log. 1,778280$

oder $0,25 = \log. 1,778280 = \log. \sqrt{a} = \log. b.$

Wir kennen demnach nunmehro die Logarithmen zweyer Zahlen, die ungleich näher bey 2 liegen als die beyden Zahlen 1 und 10; denn die Grenzen sind nunmehro 3,162278 und 1,778280, davon die letzte der 2 viel näher liegt als die erste, und jetzt sind wir gewiß, daß der gesuchte Logarithmus zwischen 0,5 und 0,25 enthalten seyn müsse, ja wir sehen überdem, daß derselbe näher bey 0,25 als bey 0,5 seyn werde.

Um die gefundenen Grenzen noch enger zusammenzurücken, so zähle man die Logarithmen dieser Grenzen zusammen, und theile die Summe durch 2, so kommt

$$\frac{0,5 + 0,25}{2} = \frac{\log. a + \log. b}{2} = \frac{1}{2} \log. a.b =$$

$\log. \sqrt{ab}$ zufolge §. 40. und §. 42. Da nun $a = 3,162278$ und $b = 1,778280$ ist, so wird $ab = 5,623416$ und $\sqrt{ab} = 2,371374$, mithin, weil $\frac{0,5 + 0,25}{2} = 0,375$ ist, so wird

0,375

$0{,}375 = \log.\ 2{,}371374 = \log.\ \sqrt{a\,b} = \log.\ c$, und nun sind die nächsten Grenzen der Zahl 2 die Zahlen $b = 1{,}778280$ und $c = 2{,}371374$.

Geht man eben so weiter, wie wir es hier zuletzt gezeiget haben, so finden wir, der Ordnung nach, wenn wir die eben gefundenen Werthe mitnehmen, und den Logarithmus nur bis auf 6 Stellen eines zehentheiligen Bruches berechnen.

$0{,}500000 = \log.\ 3{,}162278 = \log.\ a$

$0{,}250000 = \log.\ 1{,}778280 = \log.\ \sqrt{a} = \log.\ b$

$0{,}375000 = \log.\ 2{,}371374 = \log.\ \sqrt{ab} = \log.\ c$

$0{,}312500 = \log.\ 2{,}053525 = \log.\ \sqrt{bc} = \log.\ d$

$0{,}281250 = \log.\ 1{,}910953 = \log.\ \sqrt{bd} = \log.\ e$

$0{,}296875 = \log.\ 1{,}980957 = \log.\ \sqrt{de} = \log.\ f$

$0{,}304687 = \log.\ 2{,}016915 = \log.\ \sqrt{df} = \log.\ g$

$0{,}300781 = \log.\ 1{,}998855 = \log.\ \sqrt{fg} = \log.\ h$

$0{,}302734 = \log.\ 2{,}007864 = \log.\ \sqrt{gh} = \log.\ i$

$0{,}301758 = \log.\ 2{,}003381 = \log.\ \sqrt{hi} = \log.\ k$

$0{,}301269 = \log.\ 2{,}001103 = \log.\ \sqrt{hk} = \log.\ l$

$0{,}301025 = \log.\ 1{,}999978 = \log.\ \sqrt{hl} = \log.\ m$

$0{,}301147 = \log.\ 2{,}000540 = \log.\ \sqrt{lm} = \log.\ n$

$0{,}301086 = \log.\ 2{,}000260 = \log.\ \sqrt{mn} = \log.\ o$

$0{,}301056 = \log.\ 2{,}000119 = \log.\ \sqrt{mo} = \log.\ p$

$0{,}301040 = \log.\ 2{,}000048 = \log.\ \sqrt{mp} = \log.\ q$

$0{,}301033 = \log.\ 2{,}000013 = \log.\ \sqrt{mq} = \log.\ r$

$0{,}301028 = \log.\ 1{,}999990 = \log.\ \sqrt{mr} = \log.\ s$

$0{,}301030 = \log.\ 2{,}000002 = \log.\ \sqrt{rs} = \log.\ t$

$0{,}301029 = \log.\ 1{,}999996 = \log.\ \sqrt{st} = \log.\ u$

0,301030

$0,301030 = \log. 1,999999 = \log. \sqrt{tu} = \log. v$

$0,301030 = \log. 2,000000 = \log. \sqrt{tv} = \log w$

Da wir nunmehro die Zahl 2 so nahe herausgebracht haben, daß der Unterschied noch nicht ein einziges Millionen Theilchen der Einheit beträgt, so sind wir auch gewiß, daß der Logarithmus dieser Zahl, durch das hier beobachtete Verfahren, bis auf 6 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau ist gefunden worden; diesem zufolge ist nun

$$10^{0,301030} = 2$$

und in dem Systeme, dessen Wurzel = 10 ist,

$$\log. 2 = 0,301030.$$

§. 53.

Das Verfahren des vorigen § zeiget deutlich, wie der Logarithmus einer jeden Zahl berechnet werden könne, und dieses mag zureichen, uns einen Begrif zu geben, wie diese künstliche Zahlen berechnet werden können, woferne nicht schon bereits lange diese Arbeit, ob gleich durch ein ganz anderes Verfahren, so wie ich es im zweyten Heft meines Taschenbuches umständlich gezeiget habe, geschehen, und in schickliche Tabellen gebracht wäre, davon wir zu Ende dieses Werkes einen zureichenden Auszug geben werden. Uebrigens sehen wir leicht, daß, wenn, nach dem hier erklärten Verfahren, die Logarithmen berechnet werden sollten, dieses nur für die einfachen Zahlen nöthig seyn würde, da sich die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen immer leicht nach §. 40., durch ein blosses Zusammenzählen der Logarithmen der einfachen Zahlen, wodurch die andern zusammengesetzt werden können, finden lassen.

§. 54.

§. 54.

Ich werde mich daher bey der Berechnung der Logarithmen nun auch nicht weiter aufhalten. Eben so wenig werde ich hier den Gebrauch der Tabellen, so zu Ende dieses Werkes vorkommen, weiter erklären, da dasjenige, so dabey anzumerken ist, leicht bey den Tabellen selbsten geschehen kann. Vielmehr will ich jetzt zur Auflösung der Dreyecke selbst übergehen und zeigen, wie man die Seiten und Winkel derselben durch Rechnung finden könne, so bald uns nur die zur Auflösung nöthigen Stücke gegeben werden.

Lehrsätze zur Berechnung der geradlinigten Dreyecke.

§. 55.

Nachdem wir im vorigen § alles erkläret haben, was zur Auflösung der Dreyecke zu wissen nur immer nöthig ist, so können wir nunmehro mit desto größerer Zuversicht die hieher gehörigen Lehrsätze abhandeln und ihre Anwendung durch Beyspiele zeigen. Wir werden uns in der Folge leicht überzeugen, daß es nur auf wenige Sätze ankömmt, und die auch leicht von jedem verstanden werden können, der sich nur einigermaßen mit den vorigen Sätzen bekannt gemacht hat. Wir bemerken zuförderst, daß sich die Auflösungen aller geradlinigten Dreyecke überhaupt, in dreyen verschiedenen Hauptfällen eintheilen lassen, die sich bloß nach den gegebenen und gesuchten Stücken eines Dreyeckes richten. Diese drey Hauptfälle unterscheiden wir folgendermaßen:

Erster

Erster Hauptfall.

Es werden gegeben zwey Winkel und eine Seite, und gesucht der dritte Winkel und die beyden andern Seiten.

Zweyter Hauptfall.

Es werden gegeben ein Winkel und zwo Seiten, und gesucht die beyden andern Winkel und die dritte Seite.

Dritter Hauptfall.

Es werden gegeben alle drey Seiten, und gesucht alle drey Winkel.

Mehr als diese drey Hauptfälle kann es nun nicht geben, und wir haben nur noch zu sehen, ob nicht aus einem derselben Nebenfälle entspringen können. In dieser Absicht wollen wir einen jeden insbesondere hier sorgfältig untersuchen.

Da, sobald zwey Winkel eines Dreyeckes gegeben sind, der dritte Winkel des Dreyeckes leicht gefunden wird, wenn man die Summe der gegebenen Winkel von zween rechten Winkeln oder 180° abziehet, so können wir annehmen, daß, sobald zwey Winkel eines Dreyecks gegeben sind, es eben so viel ist, als wären alle drey Winkel stückweise bekannt, und es bleiben uns, weil eine Seite gegeben ist, nur noch zwo Seiten des Dreyeckes zu suchen übrig. Da nun jede der gesuchten Seiten, eben so wie die gegebene, einem bekannten Winkel gegenüber liegt, so muß auch eine jede derselben nach gleichen Grundsätzen berechnet werden können, da hier keine Verschiedenheit der Lage statt finden kann, wir mögen von beyden suchen, welche wir wollen. Es hat daher der erste Hauptfall weiter keinen Nebenfall, und lässet sich folglich ganz allgemein nach einerley Regel behandeln.

Ganz anders ist es indessen mit dem zweyten Hauptfall beschaffen, da es nicht gleichgültig ist, wie der gegebene Winkel in Rücksicht der gegebenen Sei-

ten liegt. Denn es kann der gegebene Winkel einer bekannten Seite sowohl als der gesuchten gegenüber liegen, und da in diesem letzten Fall der gegebene Winkel zwischen den zween gegebenen Seiten liegt, so unterscheiden wir hier zwey Nebenfälle folgendermaßen:

Erster Nebenfall des zweyten Hauptfalles.

Es werden gegeben ein Winkel und zwo Seiten, davon die eine dem gegebenen Winkel gegenüber liegt, und man sucht die andern beyden Winkel und die dritte Seite.

Zweyter Nebenfall des zweyten Hauptfalles.

Es werden gegeben ein Winkel und zwo Seiten, die den gegebenen Winkel einschließen, und man sucht die andern beyden Winkel und die dritte Seite.

Endlich so können wir bemerken, daß beym dritten Hauptfall kein Nebenfall statt finden kann, weil es gleichgültig ist, welchen von den dreyen Winkeln des Dreyeckes wir suchen, da einer nach eben den Regeln als der andere bestimmt werden muß, weil hier wiederum keine Verschiedenheit der Lage statt finden kann.

Auflösung des ersten Hauptfalles.

§. 56.

Es sey Fig. 5 ABC ein beliebiges Dreyeck, so läßt sich um dasselbe, nach einem sehr bekannten Satz der Meßkunst, jederzeit ein Kreis dergestalt beschreiben, daß derselbe durch die Spitzen der Winkel des Dreyeckes geht. Durch dieses Mittel werden aber die Seiten des gegebenen Dreyeckes Sehnen des beschriebenen Kreises, und man erhält AB = Chord. AB, AC = Chord. AC, BC = Chord. BC, mithin, da der Bogen AB das Maaß von 2 C, der Bogen AC

aber

aber das Maaß von 2 B, und endlich der Bogen BC das Maaß von 2 A ist, so erhalten wir auch AB = Chord. 2 C, AC = Chord. 2 B und BC = Chord. 2 A. Nun ist aber, nach §. 3, Chord. 2 C = 2 sin. C, und folglich eben so, Chord. 2 B = 2 sin. B, so wie Chord. 2 A = 2 sin. A, folglich auch AB = 2 sin. C, AC = 2 sin. B und BC = 2 sin. A, und dieses giebt folgende Verhältnißgleichungen oder Proportionen

AB : AC = 2 sin. C : 2 sin. B
AB : BC = 2 sin. C : 2 sin. A
AC : BC = 2 sin. B : 2 sin. A,

oder, indem wir die beyden letzten Glieder einer jeden dieser Verhältnißgleichungen durch 2 theilen.

1) AB : AC = sin. C : sin. B
2) AB : BC = sin. C : sin. A
3) AC : BC = sin. B : sin. A.

Wir sehen demnach hieraus, daß aus diesen dreyen Verhältnißgleichungen allgemein folgender Lehrsatz entspringet:

Die Seiten eines jeden geradlinigten Dreyeckes verhalten sich gegeneinander eben so, wie die *Sinus*, der den Seiten gegenüber liegenden Winkeln.

Nach diesem Lehrsatze, der ungemein einfach ist, lässet sich nicht allein der erste Hauptfall, sondern auch der erste Nebenfall des zweyten Hauptfalles sehr bequem auflösen. Wir wollen daher hier zuförderst die Anwendung dieses Lehrsatzes auf die Bestimmung des ersten Hauptfalles anwenden.

Da im ersten Hauptfall nur zwo Seiten gesucht werden, und eine jede derselben einem bekannten Winkel gegenüber liegt, so merke man folgende Regel zur Auflösung des ersten Hauptfalles:

Wie sich verhält der *Sinus* desjenigen Winkels, welcher der gegebenen Seite gegenüber

liegt, zum *Sinus* des Winkels, welcher der gesuchten Seite gegenüber liegt, eben so verhält sich die gegebene Seite zur gesuchten.

Da man übrigens Freyheit hat, die beyden mittlern Glieder einer jeden Verhältnißgleichung miteinander zu verwechseln, so kann man auch schließen;

Wie sich verhält der *Sinus* des Winkels, welcher der gegebenen Seite gegenüber liegt, zu dieser gegebenen Seite, eben so verhält sich der *Sinus* des Winkels, welcher der gesuchten Seite gegenüber liegt, zu dieser gesuchten Seite.

Wir können hiebey bemerken, daß, wir mögen uns der ersten oder der letzten Regel bedienen, allemal in dem ersten Hauptfall von dem Sinus desjenigen Winkels, so der gegebenen Seite gegenüber liegt, muß angefangen werden zu schließen, und dieser Grundsatz ist zureichend, um jedesmal die Verhältnißgleichung richtig anzusetzen, denn da es gleich viel ist, ob wir den Sinus des Winkels, welcher der gesuchten Seite gegenüber liegt, zum zweyten, und die gegebene Seite zum dritten Gliede der Verhältnißgleichung machen oder umgekehrt verfahren, so ist daher kein Irrthum zu befürchten.

I. Beyspiel. Es sey in dem Dreyecke a b c Fig. 6. die Seite b c = 213 Fuß, nebst den Winkeln b = 57° und c = 20° gegeben, so können daraus die beyden andern Seiten a b, a c, und der Winkel a folgendermaßen gefunden werden.

$$\begin{array}{rl} b = & 57^\circ \\ c = & 20 \\ \hline b + c = & 77 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 180^\circ \\ 77 \\ \hline 103 = a \end{array}$$

Nachdem der Winkel a hierdurch gefunden ist, so können wir jede von den Seiten a b oder a c leicht berechnen. Soll zum Beyspiel die Seite a b berechnet werden, so schließe man, weil der Winkel 103° der

gege

gegebenen Seite, und der Winkel 20° der gesuchten Seite gegenüber liegt.

$$\sin. 103^\circ : \sin. 20^\circ = 213' : ab.$$

oder da nach §. 11. $\sin. 103^\circ = \sin. (180^\circ - 103^\circ) = \sin. 77^\circ$ ist

$$\sin. 77^\circ : \sin. 20^\circ = 213' : ab$$

bedienet man sich daher der Logarithmen, so kommt die Rechnung folgendermaßen zu stehen:

log. bc = log. 213′ =		2. 3283796
log. sin. c = log. sin. 20° =		9. 5340517
davon die Summe =		11. 8624313
log. sin. a = log. sin. 77° =		9. 9887239
log. ab = log. 74,77 =		1. 8737074

mithin ist ab = 74,77 Fuß.

Eben so findet sich die Seite ac durch folgende Rechnung:

$$\sin. 103^\circ : \sin. 57^\circ = 213' : ac$$

oder

$$\sin. 77^\circ : \sin. 57^\circ = 213' : ac$$

und wenn wir mit Logarithmen rechnen:

log. bc = log. 213′ =		2. 3283796
log. sin. b = log. sin. 57° =		9. 9235914
davon die Summe =		12. 2519710
log. sin. a = log. sin. 77° =		9. 9887239
log. ac = log. 183,3 =		2. 2632471

folglich ac = 183,3 Fuß.

II. Beyspiel. Es sey in dem Dreyecke abc Fig. 7. die Seite ab = 615 Ruthen, nebst den beyden Winkeln b = 65° und c = 19° gegeben, und es soll daraus der dritte Winkel a, nebst den beyden Seiten bc und ac berechnet werden, so kommt die Rechnung folgendermaßen zu stehen:

$b = 65^\circ$	180°
$c = 19$	84
$b + c = 84$	$96^\circ = a$

und nun schließe man, da $\sin. 96^\circ = \sin. (180^\circ - 96^\circ) = \sin. 84^\circ$ ist.

$\sin. 19^\circ : \sin. 84^\circ = 615$ Ruthen : bc

und hieraus

log. ab	= log. 615 =	2. 7888751
log. sin. a	= log. sin 84° =	9. 9976143
davon die Summe	=	12. 7864894
log. c	= log. sin. 19° =	9. 5126419
log. bc	= log. 1879 =	3. 2738475

folglich bc = 1879 Ruthen, oder indem man, außer den Ganzen, noch zehentheilige Brüche bestimmt, genauer bc = 1878,655 Ruthen.

Eben so ergiebt sich

$\sin. 19^\circ : \sin. 65^\circ = 615$ Ruthen : ac

oder

log. ab	= log. 615 =	2. 7888751
log. sin. b	= log. sin. 65° =	9. 9572757
davon die Summe	=	12. 7461508
log. c	= log. sin. 19° =	9. 5126419
log. ac	= log. 1712,026 =	3. 2335089

und ac = 1712,020 Ruthen.

Es ist übrigens leicht einzusehen, wie man verfahren müsse, wenn einer der beyden gegebenen Winkel ein rechter wäre. Es wird nemlich in diesem Falle, wo ein Winkel 90° ist, auch der Sinus dieses Winkels = 1 und sein Logarithmus = 0, wobey aber einige Vorsicht beobachtet werden muß, da in den Tabellen alle Logarithmen der Sinus um 10 sind vergrößert worden. Man muß daher in allen Fällen, wo der Sinus von 90° gebraucht wird, für log. sin. 90° statt 0 die Zahl 10 setzen.

Auf-

Auflösung für den ersten Nebenfall des zweyten Hauptfalles.

§. 57.

Hier kann eben so, wie im vorigen § der allgemeine Lehrsatz gebraucht werden, wodurch wir den ersten Hauptfall aufgelöset haben. Denn da hier immer eine der beyden gegebenen Seiten dem gegebenen Winkel gegenüber liegen muß, so kann man auch aus dem Verhältniß der beyden gegebenen Seiten, das Verhältniß der Sinus des bekannten und eines der beyden unbekannten Winkel, welcher der andern gegebenen Seite gegenüber liegt, bestimmen. In dieser Absicht können wir schließen:

Wie sich verhält die Seite, welche dem gegebenen Winkel gegenüber liegt, zu derjenigen, welche dem gesuchten Winkel entgegen gesetzt ist, eben so verhält sich der *Sinus* des gegebenen Winkels zum *Sinus* des gesuchten.

Wären daher in dem Dreyecke abc Fig. 8. die beyden Seiten ab, ac, nebst dem Winkel abc gegeben, so kann daraus der Winkel acb durch folgende Verhältnißgleichung bestimmt werden

$$ac : ab = \sin. abc : \sin. acb.$$

Ist demnach hieraus der Winkel acb bestimmt, so kann die Summe der beyden Winkel abc + acb von 180 Grad abgezogen werden, um den dritten Winkel bac zu berechnen.

Endlich so kann auch nach dem vorigen § die Seite bc durch folgende Verhältnißgleichung bestimmt werden.

$$\sin. abc : \sin. bac = ac : bc.$$

Geben wir auf das hier gesagte gehörig acht, so werden wir leicht gewahr, daß nur allein durch dieses Verfahren derjenige Winkel geradezu gefunden werden kann, welcher der andern gegebenen Seite ge-

genüber liegt. Denn der Winkel, welcher der gesuchten Seite gegenüber liegt, sowohl als diese Seite selbst können allererst gefunden werden, nachdem vorher derjenige Winkel, so der einen der beyden gegebenen Seiten gegenüber liegt, ist gefunden worden. Wir wollen daher jetzt zeigen, wie man auch diese Stücke für sich finden könne, ohne vorher, wie oben den Winkel acb zu berechnen.

Man fälle von a auf bc die senkrechte Linie ad, so hat man in dem Dreyecke abd folgende Verhältnißgleichung:

$$\sin. 90^\circ : \sin. b = ab : ad$$

oder da $\sin. 90^\circ = 1$, so ergiebt sich $ad = ab. \sin. b$.

Eben so erhalten wir

$$\sin. 90^\circ : \sin. bad = ab : bd$$

mithin da $\sin. 90^\circ = 1$ und $\sin. bad = \cos. b$, so ergiebt sich auch hieraus $bd = ab. \cos. b$.

Nachdem hierdurch ad und bd gefunden sind, so erhält man ferner in dem Dreyecke adc nach dem bekannten Pythagorischen Lehrsatze $dc = \sqrt{ac^2 - ad^2} = \sqrt{(ac + ad)(ac - ad)}$ und $bc = bd + dc$.

Um endlich den Winkel bac zu bestimmen, bemerke man, daß weil $c = 90^\circ - dac$ und

$$ac : ad = \sin. 90^\circ : \sin. c$$

gefunden werden, auch seyn müsse

$$ac : ad = \sin. 90^\circ : \cos. dac,$$

folglich ist $\cos. dac = \frac{ad}{ac}$, und da $bad = 90^\circ - b$, so muß auch $bac = 90 - b + dac$ seyn.

Beyspiel. Es sey $ab = 713$ Fuß, $ac = 679$ Fuß und $abc = 65^\circ$, so wird

$$679 : 713 = \sin. 65^\circ : \sin. c,$$

folglich,

folglich, wenn wir mit Logarithmen rechnen:

log. sin. b	= log. sin. 65°	=	9. 9572757
log. ab	= log. 713′	=	2. 8530895
davon die Summe		=	12. 8103652
log. ac	= log. 679′	=	2. 8318698
log. sin. c	= log sin. 72°. 7′	=	9. 9784954

mithin der Winkel c = 72°. 7′ und b + c = 137°. 7′, folglich der Winkel bac = 42°. 53′.

Es kann aber auch die Zahl 9. 9784954 den Logarithmus von dem Sinus des Winkels 180° — 72°. 7′ = 107°. 53′ vorstellen, und dann wäre auch b + c = 172°. 53′, mithin der Winkel bac nur gleich 7°. 7′, und dieses widerspricht keineswegen dem vorigen, weil beydes zugleich möglich ist, wie solches aus der Meßkunst erhellet.

Nachdem der Winkel bac, entweder gleich 42°. 53′ oder 7°. 7′ angenommen wird, finden sich auch für bc zwey verschiedene Werthe: nemlich, wenn wir bac = 42°. 53′ setzen, so erhalten wir

sin. b : sin. bac = ac : bc

und die Rechnung ist folgende:

log. ac	= log. 679	=	2. 8318698
log. sin. bac	= log. sin. 42. 53′	=	9. 8328331
davon die Summe		=	12. 6647029
log. sin. b	= log. sin. 65°	=	9. 9572757
log. bc	= log. 509,8	=	2. 7074272

Nimmt man hingegen den Winkel bac = 7°. 7′, so wird

log. ac	= log. 679	=	2. 8318698
log. sin. bac	= log. sin. 7°. 7′	=	9. 0930367
davon die Summe		=	11. 9249065
log. sin. b	= log. sin. 65°	=	9. 9572757
log. bc	= log. 92,8	=	1. 9676308

Es kann demnach die gesuchte Seite bc entweder 509,8 oder 92,8 Fuß groß seyn, denn beydes ist bey den gegebenen Stücken möglich, und es muß demnach aus ganz andern Gründen hier bestimmt werden, welcher von beyden gefundenen Werthen eigentlich der wahre ist, welches sich auch immer bey der Anwendung der Dreyeck-Meßkunst leicht thun lässet.

Nun wollen wir eben dieses durch das oben angegebene andere Mittel zu bestimmen suchen. Hierzu haben wir

log. ab	= log. 713′	=	2.8530895
log. sin. b	= log. sin. 65°	=	9.9572757
	davon die Summe	=	12.8103652
log. sin. 90°	= , , , ,		10.0000000
log. ad	= log. 646,2	=	2.8103652,

folglich ad = 646,2 Fuß. Ferner wird

log. ab	= log. 713′	=	2.8530895
log. cos. b	= log. cos. 65°	=	9.6259483
	die Summe	=	12.4790378
	log. sin 90°	=	10.0000000
log. bd	= log. 301,3	=	2.4790378

und bd = 301,3 Fuß.

Hieraus ergiebt sich nun ac + ad = 1325,2 und ac — ad = 32,8, mithin (ac + ad) (ac — ad) = 43466,56 und $\sqrt{}$ (ac + ad) (ac — ad) = 208,5. Es ist demnach, weil die Quadratwurzel sowohl positiv als negativ seyn kann, dc entweder + 208,5 oder — 208,5 Fuß. Demnach wird bc = bd + dc, wenn wir den ersten Werth nehmen, gleich 301,3 + 208,5 = 509,8 Fuß gefunden. Eben der Ausdruck bc = bd + dc giebt aber auch, wenn wir den letzten Werth für dc annehmen, bc = 301,3 — 208,5 = 92,8. Mithin haben wir eben so, wie oben, für bc zwey verschiedene Werthe, davon der

eine

eine 509,8, und der andere 92,8 Fuß ist. Um endlich den Winkel bac gradezu zu finden, können wir folgendermaßen verfahren:

$$\log \sin. 90^\circ = 10,0000000$$
$$\log. ad = \log. 646,2 = 2,8103652$$
$$\text{die Summe} = 12,8103652$$
$$\log. ac = \log. 679 = 2,8318698$$
$$\log \cos. dac = \log. \cos. 17^\circ. 53' = 9,9784954.$$

Bemerken wir daher, daß der Winkel 17°. 53', sowohl positiv als negativ bey eben demselben Cosinus seyn kann, so erhalten wir, wenn wir diesen Winkel + 17°. 53' annehmen, $bac = 90^\circ - b + dac = 90^\circ - 65^\circ + 17^\circ. 53' = 42^\circ. 53'$. Setzen wir hingegen $dac = - 17^\circ. 53'$, so wird $bac = 90^\circ - b + dac = 90^\circ - 65^\circ - 17^\circ. 53' = 7^\circ. 7'$, folglich erhalten wir für den Winkel bac eben so, wie oben zwey verschiedene Werthe, davon der eine 42°. 53 und der andere 7°. 7' gefunden wird.

Anmerkung. Die Zweydeutigkeit der Seite bc und des Winkels bac findet nur statt, wenn, wie hier in unserm Beyspiele, die Seite ba, an welcher der gegebene Winkel b liegt, größer ist als die andere gegebene Seite ac, welche dem gegebenen Winkel b gegenüber liegt. Denn findet das Gegentheil statt, so bleibt immer dc sowohl als der Winkel dac positiv, und man findet für bc und bac nur einen einzigen Werth. Es ist dieses demnach sehr zu merken, wenn man aus Vermessungen nicht unrichtige Schlüsse bey übrigens richtiger Rechnung ziehen will.

Auflösung für den zweyten Nebenfall des zweyten Hauptfalles.

§. 58.

Es seyn in dem Dreyecke ABC Fig. 9. die beyden Seiten AB, BC, nebst dem Winkel ABC gegeben, und

und man sucht die beyden Winkel BAC, ACB und die dritte Seite AC. Mit der kleinsten Seite AB von den beyden gegebenen, beschreibe man aus B den Halbkreis DAE, indem man die Seite BC rückwärts bis in D verlängert. Hierdurch wird nun DC = BC + BD und EC = BC — BE, oder da BE = BD = BA, so erhalten wir DC = BC + BA und EC = BC — BA.

Ziehen wir nun von A nach B und E die geraden Linien AD und AE, so wird der Winkel DAE ein rechter Winkel, folglich, wenn DA bis in F verlängert wird, und man ziehet von C auf DF die senkrechte Linie CF, so wird dieselbe mit AE gleichlaufend, das Dreyeck DEA wird dem Dreyecke DCF ähnlich, und man hat folgende Verhältnißgleichung:

$$DC : EC = DF : AF.$$

Das rechtwinklichte Dreyeck DFC, giebt uns überdem folgende Verhältnißgleichung:

$$\sin. CDF : \sin. DCF = CF : DF$$

oder da CDF = 90° — DCF ist, so kann man statt sin. CDF auch cos. DCF schreiben, und so wird

$$\cos. DCF : \sin. DCF = CF : DF,$$

theilen wir daher die Vorderglieder in die zustimmenden Hinterglieder, so findet sich

$$\frac{\sin. DCF}{\cos. DCF} = \frac{DF}{CF}$$

oder weil nach §. 29. der Sinus durch den Cosinus des nemlichen Bogens getheilt, die Tangente giebt

$$\text{tang. } DCF = \frac{DF}{CF}$$

Eben so finden wir in dem bey F rechtwinklichten Dreyecke

sin.

$$\sin. CAF : \sin. ACF = CF : AF$$

oder

$$\cos. ACF : \sin. ACF = CF : AF,$$

woraus eben so, wie vorhin

$$\text{tang. } ACF = \frac{AF}{CF}$$

gefunden wird. Verbinden wir daher dieses mit dem, was wir oben gefunden haben, so erhalten wir

$$\frac{DF}{CF} : \frac{AF}{CF} = \text{tang. } DCF : \text{tang. } ACF$$

oder, indem wir die beyden ersten Glieder dieser Verhältnißgleichung durch CF vervielfältigen

$$DF : AF = \text{tang. } DCF : \text{tang. } ACF.$$

Wir haben aber oben DF : AF = DC : EC gefunden, folglich ergiebt sich auch

$$DC : EC = \text{tang. } DCF : \text{tang. } ACF.$$

Es ist aber der Winkel DCF dem Winkel DEA völlig gleich, und da dieser am Umkreise liegt und mit dem Winkel am Mittelpunkte DBA auf einerley Bogen DA stehet, so wird $DCF = \frac{DBA}{2}$.

Nun ist aber DBA = BAC + BCA, mithin auch $DCF = \frac{BAC + BCA}{2}$.

Ferner ist $ACF = DCF - BCA = \frac{BCA + BCA}{2} - BCA = \frac{BAC + BCA - 2\,BCA}{2} = \frac{BAC - BCA}{2}$.

Setzen wir daher diese Werthe der Winkel DCF, ACF in die letzte Verhältnißgleichung, und nehmen auch für DC und EC die gleich zu Anfang gefundene Werthe, so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$BC + BA : BC - BA = \text{tang.} \frac{BAC + BCA}{2} : \text{tang.} \frac{BAC - BCA}{2}.$$

Setzen wir daher das Dreyeck ABC der Fig. 9 mehrerer Deutlichkeit willen, in Fig. 10 gehörig ab, und nennen nunmehr die größte der gegebenen Seiten a die kleinere b und den eingeschlossenen gegebenen Winkel c, hingegen den größern der gesuchten Winkel, welcher immer der größten gegebenen Seite gegenüber liegt, x, den kleinern y, so verwandelt sich die letzte Verhältnißgleichung in

$$a + b : a - b = \text{tang.} \frac{x + y}{2} : \text{tang.} \frac{x - y}{2},$$

folglich da immer $\frac{x - y}{2} = \frac{180^\circ - c}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} c$ gefunden wird, so sind in dieser Verhältnißgleichung die drey ersten Glieder bekannt, und man kann daraus das vierte Glied tang. $\frac{x - y}{2}$, und folglich mittelst der Tabellen auch leicht den Winkel $\frac{x - y}{2}$ finden.

Da $\frac{x + y}{2}$ die halbe Summe der unbekannten Winkel und $\frac{x - y}{2}$ ihr halber Unterschied ist, so können hieraus die Winkel x und y stückweise leicht gefunden werden, wenn man nur bemerkt, daß zufolge eines ganz allgemeinen Satzes, zwey Größen, deren halbe Summe und halben Unterschied man kennet, leicht jede für sich gefunden werden. Nemlich die größere von beyden findet sich, wenn man die halbe Summe zum halben Unterschied hinzurechnet, und die kleinere,

nere, indem der halbe Unterschied von der halben Summe hinweggenommen wird.

Aus diesem allen entspringt nun folgendes Mittel, um die beyden Winkel x und y des Dreyeckes ABC Fig. 10 einzeln zu finden, wenn in demselben der Winkel c, nebst den beyden ihn einschließenden Seiten a und b gegeben sind.

1° Man suche die Summe und den Unterschied der gegebenen Seiten. Ziehe den gegebenen Winkel von 180° ab und theile den Rest durch 2, so kommt die halbe Summe der gesuchten Winkel heraus.

2° Schließe man: wie sich verhält die Summe der beyden gegebenen Seiten zu ihrem Unterschiede, eben so verhält sich die *Tangente* der halben Summe der gesuchten Winkel zur *Tangente* ihres halben Unterschiedes.

3°. Aus der nach 2° berechneten *Tangente* des halben Unterschiedes der gesuchten Winkel, suche man diesen halben Unterschied selbst, mittelst der Tabellen, und setze denselben zu der nach 1° gefundenen halben Summen der gesuchten Winkel hinzu, so kommt der größere der beyden gesuchten Winkel heraus. Wird hingegen eben dieser halbe Unterschied von der halben Summe abgezogen, so entspringt der kleinere von beyden gesuchten Winkeln.

Es bleibet uns nunmehro nichts mehr übrig als die hier gegebene Regeln durch ein schickliches Beyspiel zu erläutern, um ihre Anwendung zu zeigen, besonders, da sie so sehr bequem sind, die beyden gesuchten Winkel durch eine und dieselbe Rechnung stückweise, mittelst der Logarithmen, zu berechnen.

Beyspiel. Es sey Fig. 10 die Seite BC = a = 1728 Ruthen, die Seite AB = b = 783 Ruthen, und der von diesen beyden Seiten eingeschlossene Winkel ABC = c = 53°. 30′, so erhalten wir

die

die Seite a = 1728°	die Summe aller Winkel = 180°
die Seite b = 783	der gegebene Winkel c = 53°. 30′
die Summe a + b = 2511	die Summe der unbek. Winkel x + y = 126° 30′
der Untersch. a — b = 945	die halbe Summe $\frac{x+y}{2}$ = 63°. 15.

Diesemnach findet sich nach 2°

$$2511 : 945 = \text{tang. } 63^\circ.\ 15' : \text{tang. } \frac{x-y}{2}$$

folglich, wenn wir mit Logarithmen rechnen:

$\log.\text{tang.} \frac{x+y}{2} = \log \text{tang.} 63^\circ.15' = 10.2975337$

$\log. (a - b) = \log.\ 945 = 2.9754318$

davon die Summe = 13.2729655

$\log. (a + b) = \log: 2511 = 3.3998467$

$\log.\text{tang} \frac{x-y}{2} = \log.\text{tang.}\ 36^\circ.\ 45' = 9.8731188$

Demnach ergiebt sich, mittelst der Tabellen, der halbe Unterschied der gesuchten Winkel $\frac{x-y}{2}$ = 36°. 45′ und nun rechne man ferner folgendermaßen:

Die halbe Summe der gesuchten Winkel, $\frac{x+y}{2} = 63^\circ.15'$

Der halbe Unterschied derselben $\frac{x-y}{2} = 36.45'$

Davon die Summe den größern gesuchten Winkel, x = 100°. 0

Und der Unterschied den kleinern y = 26. 30

bestimmen.

§. 59.

§. 59.

Nachdem durch das Verfahren des vorigen § die beyden unbekannten Winkel x und y stückweise berechnet worden sind, so ist es leicht, nach eben dem Verfahren, dessen wir uns bey dem ersten Hauptfalle bedienet haben, die dritte Seite AC unseres Dreyeckes ABC zu finden. Denn man schließe:

$$\sin. x : \sin. c = a : AC$$

oder:

$$\sin. y : \sin. c = b : AC.$$

Nehmen wir daher die erste dieser Verhältnißgleichungen und rechnen mit Logarithmen, so erhalten wir, wenn wir bey dem obigen Beyspiele verbleiben

log. a	= log. 1728	=	3.2375437
log. sin. c	= log. sin. 53°. 30′	=	9.9051787
davon die Summe		=	13.1427224
log. sin. x	= log sin. 100°	=	9.9933515
log. AC	= log. 1410,48	=	3.1493709

Es ist demnach AC = 1410,48 Ruthen.

Nach der letzten Verhältnißgleichung käme die Rechnung so zu stehen.

log. b	= log. 783	=	2.8937618
log. sin. c	= log. sin 53°. 30′	=	9.9051787
davon die Summe		=	12.7989405
log. sin. y	= log. sin. 26°. 30′	=	9.6495274
log. AC	= log. 1410,63	=	3.1494131

Demnach die gesuchte Seite AC = 1410,63 Ruthen, welche Bestimmung nur um 0,15 einer Ruthe von der vorigen verschieden ist, und daher rührt, daß wir die Winkel x und y nur bis auf einzelne Minuten bestimmt haben, die wir doch leicht noch auf kleinere Theile bestimmen könnten, woferne eine größere Ge-

 naueig-

nauigkeit erfordert würde. Wir können indessen bemerken, daß, wenn wir auf diese zwey verschiedene Arten die Seite AC berechnet haben, wir um desto weniger von der Wahrheit uns entfernen, wenn wir von beyden Bestimmungen das Mittel nehmen; und somit würden wir sehr genau in diesem Falle für die Seite AC den Werth von 1410, 55 Ruthen erhalten.

§. 60.

Durch das Verfahren der vorigen §§ finden wir zwar immer alle Stücke eines Dreyeckes, sobald zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel desselben gegeben sind, allein wir sehen auch leicht, daß wir, um die dritte Seite eines dergleichen Dreyeckes zu berechnen, erst beyde Winkel desselben, die uns nicht gegeben worden, vorher berechnen müssen. Da nun dieses in vielen Fällen beschwerlich ist, weil man öfter keinen von beyden Winkeln zu wissen nöthig hat, wohl aber die dritte Seite eines solchen Dreyeckes aus den gegebenen Stücken allein bestimmen will, so wollen wir hier zeigen, wie man dazu ohne Umwege gelangen könne.

Es sey Fig. 11 ABC ein Dreyeck, und in demselben BC = a, AB = b und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel ABC = c gegeben. Man fälle von A auf BC die senkrechte Linie AD, so wird dadurch das gegebene Dreyeck ABC in die beyden rechtwinklichten Dreyecke ABD und ADC zerfällt, und nun haben wir im ersten Dreyeck

$$\sin. 90 : \sin. ABD = AB : AD$$

oder

$$\sin. 90 : \sin. c = b : AD,$$

folglich, da $\sin. 90° = 1$ ist, $AD = b. \sin. c.$

Ferner erhalten wir

$$\sin. 90° : \sin. BAD = AB : BD,$$

folglich,

folglich, da sin. 90° = 1 und sin. BAD = cos. ABD = cos. c gefunden wird, so ist auch

$$\sin. 90^\circ : \cos. c = b : BD,$$

mithin BD = b. cos. c und DC = BC — BD = a — b cos. c. Nachdem AD und DC sind gefunden worden, so ergiebt sich endlich nach dem Pythagorischen Lehrsatze die gesuchte dritte Seite durch

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$$

Beyspiel. Wenn wir hier das im vorigen § gebrauchte Beyspiel beybehalten, so wird

log. b = log. 783°	=	2. 8937618
log. sin. c = log. sin. 53°. 30′	=	9. 9051787
davon die Summe	=	12. 7989405
log. sin. 90° = , , , , ,		10. 0000000
log. AD = log. 629, 4	=	2. 7989405

folglich AD = 629, 4 Ruthen.

Eben so wird

log. b = log. 783°	=	2. 8937618
log. cos. c = log. cos. 53°. 30′	=	9. 7743876
davon die Summe	=	12. 6681494
log. sin. 90° = , , ,	=	10. 0000000
log. BD = log. 465, 7	=	2. 6681494.

Demnach BD = 465, 7 Ruthen, und DC = 1728° — 465°, 7 = 1262, 3 Ruthen.

Nun erhalten wir ferner AD^2 = 396144, 36; DC^2 = 1593401, 29, mithin $AD^2 + DC^2$ = 1989545, 65 und $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$ = 1410, 51 Ruthen, welcher Werth von AC mit dem mittlern Werth, so wir im vorigen § gefunden haben, so genau zutrift, als man es hier verlangen kann, da wir auch in diesem Beyspiele AD und BD nicht bis auf hundert Theilchen einer Ruthe genau bestimmt haben.

Anmerkung. Da $AD = b. \sin. c$ und $DC = a - b. \cos. c.$ gefunden worden, so wird auch $AC^2 = b^2. \sin. c^2 + (a - b. \cos. c.)^2$ Da nun $(a - b \cos. c)^2 = a^2 - 2 ab \cos. c + b^2. \cos. c^2$ gefunden wird, so ist auch $AC^2 = b^2. \sin. c^2 + a^2 - 2 ab \cos. c + b^2. \cos. c^2$, und weil $b^2 \sin. c^2 + c^2. \cos. c^2 = b^2. (\sin. c^2 + \cos. c^2) = b^2$, so erhalten wir endlich geradezu

$$AC^2 = b^2 + a^2 - 2 ab. \cos. c,$$

eine Formel, welche sich bequem durch Zahlen berechnen lässet, so wie wir dieses hier zeigen wollen, indem wir nach derselben das obige Beyspiel berechnen.

Weil in diesem Beyspiele $a = 1728$, $b = 783$, $c = 53^\circ. 30'$ angenommen worden, so wird $b^2 = 613089$, $a^2 = 2985984$, $2 ab = 2706048$, $\cos. 53^\circ. 30 = 0,5948228$ und $2 ab \cos. c = 1609619$, folglich $AC^2 = 613089 + 2985984 - 1609619 = 1989454$, mithin $AC = \sqrt{1989454} = 1410,48$ Ruthen.

Es ist hier übrigens ohne Erinnerung klar, daß, sobald c größer als 90° angenommen wird, dem zufolge, was wir im § 12 festgesetzt haben, der Cosinus dieses Winkels negativ werde, mithin sowohl $DC = a + b. \cos. c$ als auch $AC^2 = b^2 + a^2 + 2 ab \cos. c$ in diesem Falle genommen werden müssen.

§. 61.

Aus $AD = b. \sin. c$ und $DC = a - b \cos. c$ ergiebt sich nun leicht $ACD = y$; denn es wird

$$DC : AD = \sin. DAC : \sin. ACD$$

und hieraus

$$\frac{DC}{AD} = \frac{\sin. DAC}{\sin. ACD}$$

Da nun $\sin. DAC = \sin. (90^\circ - y) = \cos. y$ und $\sin. ACD = \sin. y$, so wird

$$\frac{DC}{AD} = \frac{\cos. y}{\sin. y} = \cot. y. \text{ und}$$

$$\cot. y = \frac{a - b \cos. c}{b. \sin. c} = \frac{a}{b. \sin. c} - \cot. c$$

I. Bey-

I. Beyspiel. Wenn wir hier wiederum $a = 1728$, $b = 783$ und $c = 53°. 30'$ annehmen, so ist AD $= 629,4$ Ruthen, DC $= 1262,3$ Ruthen, mithin wird

$$\log. DC = \log. 1262,3 = 3.1011626$$
$$\log. AD = \log. 629,4 = 2.7989267$$
$$\log.\cot. y = \log.\cot. 26°. 30' = 10.3022359$$

Anmerkung. Weil hier, nachdem die untere Zahl von der obern abgezogen ist worden, eigentlich zur Kennziffer nur Nulle übrig bleibt, so muß man zu dieser Kennziffer noch 10 hinzu rechnen, weil die Kennziffern in den Tabellen um 10 größer sind, als sie wirklich seyn sollten.

II. Beyspiel. Will man AD, DC nicht vorher berechnen, so kann die Rechnung nach der letzten Formel sehr bequem folgendermaßen geführet werden.

$$\log. a = \log. 1728 = 3.2375437$$
$$\log. b = \log. 783 = 2.8937618$$
$$\text{Unterschied} = 10.3437819$$
$$\log.\sin. c = \log.\sin. 53°. 30' = 9.9051787$$
$$\log. (a : b \sin. c) = 0.4386032$$

mithin $\frac{a}{b. \sin. c} = 2,745385$

$$\cot. c = 0,739961$$
$$\cot. y = 1,005424$$

und demnach auch hieraus $y = 26°. 30'$, so wie vorhin.

Auf eben die Art, wie wir im zweyten Beyspiele den Winkel y bestimmt haben, lässet sich auch der Winkel x finden, wenn wir nur in der letzten Formel a mit b verwechseln. Denn so wird auch

$$\cot. x = \frac{b}{a. \sin. c} - \cot. c$$

gefunden, und die Rechnung kommt folgendermaßen zu stehen:

$$\begin{array}{lcr} \log. b = \log. 783 = & \cdot & 2.8937618 \\ \log. a = \log 1728 = & \cdot & 3.2375437 \\ \text{Unterschied} = & \cdot & 9.6562181 \\ \log.\sin. c = \log.\sin. 53^\circ.30 = & & 9.9051787 \\ \log.(b : a \sin. c) = & \cdot\ \cdot & -1.7510394 \end{array}$$

Hieraus findet sich, weil die Kennziffer des Logarithmen negativ oder — 1 ist,

$$\frac{b}{a \sin. c} = +0{,}5636888.$$

$$\cot. c = +0{,}7399611$$

$$\cot. x = \frac{b}{a.\sin. c} - \cot. c = -0{,}1762723$$

Wir finden demnach für cot. x hier einen negativen Werth, und dieses zeiget uns sogleich an, daß der gesuchte Winkel x größer als 90° seyn müsse; um ihn zu bestimmen, sehe man die gefundene Zahl als positiv an, so stimmet zu derselben, in den Tafeln, die Cotangente von 80°, und, wenn dieser Winkel von 180 abgezogen wird, so erhalten wir eben so, wie oben x = 100°.

Anmerkung. Ich bin mit Fleiß bey der Auflösung über den zweyten Nebenfall des zweyten Hauptfalles etwas umständlich gewesen. Denn es war nöthig zu zeigen, daß man öfter durch verschiedene Wege zu einem und eben demselben Endzwecke gelangen könne. Ich sehe wohl ein, daß diejenigen meiner Leser, welche die in diesem § ganz zuletzt gegebene Auflösung völlig verstehen wollen, etwas mit den Zeichen bekannt seyn müssen, wodurch man entgegengesetzte Größen von einander zu unterscheiden pflegt, allein ich glaube auch, daß sie nie die Mühe bereuen werden, wenn sie, woferne sie damit noch nicht umzugehen wüßten, sich damit etwas bekannt machten, weil sehr oft dergleichen Fälle vorkommen, wo man sie unumgänglich nöthig hat. Uebrigens ist dieses eine ganz leichte Sache, und

und kann ein jeder ein Werk dazu wählen, welches er will, worinnen nur die ersten Grundsätze der Buchstaben-Rechnung erkläret sind. Sollten sich indessen unter meinen Lesern einige finden, so auch hierzu nicht Lust hätten, so ist immer für sie genug im vorigen gesorgt, und somit haben sie nur solche Auflösungen zu überschlagen, die sie nicht völlig einsehen, und befürchten müßten, eine falsche Anwendung von denselben zu machen. Denn es ist weit besser, eine Auflösung gar nicht zu gebrauchen, als sie unrichtig anzuwenden; besonders, wenn man andere an deren Stelle gebrauchen kann.

§. 62.

Wenn a = b oder wenn das Dreyeck gleichschenklicht ist, so wird $a - b = 0$, mithin muß auch § 58 das vierte Glied der Verhältnißgleichung oder tang. $\frac{x - y}{2} = 0$ und somit der Winkel $\frac{x - y}{2} = 0$ seyn. Das will sagen: bey einem gleichschenklichten Dreyecke ist der halbe Unterschied der Winkel an der Grundlinie Nulle, oder diese Winkel sind einander gleich; ein Satz, der in der Meßkunst erwiesen wird, und hier aus unserer Auflösung unmittelbar folget.

Ist endlich der von den gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel ein rechter oder $c = 90°$, so ist auch $x + y = 90°$, mithin $\frac{x + y}{2} = 45°$ und tang. $\frac{x + y}{2} = 1$. und die Verhältnißgleichung

$$a + b : a - b = \text{tang. } \frac{x + y}{2} : \text{tang. } \frac{x - y}{2}$$

verwandelt sich in folgende:

$$a + b : a - b = 1 : \text{tang. } \frac{x - y}{2}$$

Nun kann aber auch $x = 90^\circ - y$ gesetzt werden, und somit wird $x - y = 90 - 2y$ und $\frac{x - y}{2} = 45^\circ - y$; dieses stimmt $\text{tang.}\ \frac{x - y}{2} = \text{tang.}\ (45^\circ - y)$ und folglich giebt die letzte Verhältnißgleichung $\text{tang.}\ (45^\circ - y) = \frac{a - b}{a + b}$.

Nehmen wir nun Fig. 12 das bey B rechtwinklichte Dreyeck ABC und setzen $AB = b$, $BC = a$ und den Winkel $C = y$, so ist $A = x$ und man erhält

$$a : b = \text{sin.}\ x : \text{sin.}\ y$$

oder, weil $x = 90 - y$, mithin $\text{sin.}\ x = \text{sin.}\ (90 - y) = \text{cos.}\ y$ ist

$$a : b = \text{cos.}\ y : \text{sin.}\ y.$$

Werden daher die beyden letzten Glieder dieser Verhältnißgleichung durch cos. y getheilet, so ergiebt sich

$$a : b = 1 : \text{tang.}\ y.$$

und das giebt ganz einfach die Gleichung

$$\text{tang.}\ y = \frac{b}{a}$$

Aus der letzten Verhältnißgleichung erhalten wir aber auch unmittelbar folgende:

$$a + b : a - b = 1 + \text{tang.}\ y : 1 - \text{tang.}\ y$$

und hieraus ferner

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - \text{tang.}\ y}{1 + \text{tang.}\ y}$$

Vergleichen wir demnach dieses mit dem, was wir bereits oben gefunden haben, so wird

$$\text{tang.}\ (45^\circ - y) = \frac{1 - \text{tang.}\ y}{1 + \text{tang.}\ y}$$

eine Formel, wodurch die Tangenten aller Winkel bis 45° leicht berechnet werden können, sobald die-

selben

selben nur bis $22\frac{1}{2}^{\circ}$ gefunden sind, und die übrigens hier aus den obigen Sätzen ganz leicht und natürlich geschlossen werden konnte.

§. 63.

Es wäre uns hier leicht, noch eine neue Regel für eben diesen Fall anzugeben, so wie sich dieselbe unmittelbar aus dem, was wir zu Ende des vorigen § gesagt haben, herleiten läßt. Allein ich sehe mich genöthiget hier abzubrechen, um nicht zu weitläuftig zu werden, und nunmehr zur Auflösung des letzten Hauptfalles überzugehen, von welchem wir schon oben gezeiget haben, daß kein Nebenfall statt findet, weil es gleich ist, welchen von den gesuchten Winkeln man aus den gegebenen dreyen Seiten berechnen will, woferne nur sonst die Auflösung dieses Falles allgemein genug ist, so wie wir dieses jetzt weiter zeigen wollen.

Auflösung für den dritten oder letzten Hauptfall.

§. 64.

Es sey ABC Fig. 13 das gegebene Dreyeck, und in demselben die eine Seite AB = a die andere Seite BC = b, und die dritte Seite AC = c bekannt.

Mit der kleinsten Seite AB beschreibe man aus A einen Kreis BDEF, welcher die Seite BC in F und die dritte Seite AC in E schneidet, so ist AE = AB = a, und wenn wir CA bis in D verlängern, so wird auch AD = AB = a, mithin erhalten wir CD = AC + AD = c + a und CE = AC — AE = c — a.

Da die vier Punkte D, B, F, E in dem Umkreise des aus A mit AB beschriebenen Kreises liegen, so sind in dem Viereck DBFE, jede zwey gegenüberliegende Winkel zusammengenommen, zween rechten Winkeln gleich, wie dieses aus der Meßkunst bekannt ist.

Dieser Satz giebt aber BFE + D = 2 R, und da auch nach einem andern sehr bekannten Satz der Meßkunst, BFE + EFC = 2 R sind, indem wir hier unter R den rechten Winkel verstehen, so wird BFE + D = BFE + EFC oder bloß D = EFC. Die beyden Dreyecke DBC und FEC haben demnach einen gleichen Winkel, und da überdem der Winkel C diesen beyden Dreyecken gemein ist, so sind sie einander ähnlich, und man erhält folgende Verhältnißgleichung:

$$BC : CD = CE : CF$$

oder $b : c + a = c - a : CF$,

mithin wird $CF = \frac{(c + a)(c - a)}{b}$ gefunden.

Nachdem hierdurch CF bestimmt ist worden, so erhalten wir ferner $BF = b - CF$, und da auch $AF = AB = a$ ist, so sind uns in dem gleichschenklichten Dreyecke ABF alle Seiten bekannt, dessen Winkel B zugleich einer der gesuchten Winkel des gegebenen Dreyeckes ABC ist, den wir jetzt folgendermaßen bestimmen können.

Da ein jedes gleichschenklichtes Dreyeck an der Grundlinie zwey gleiche Winkel hat, so ist auch in dem gleichschenklichten Dreyecke ABF der Winkel B dem Winkel F gleich, mithin $B + F = 2 B$ und $A = 180° - 2 B$. Dieses giebt nun folgende Verhältnißgleichung:

$$AB : BF = \sin. F : \sin. A$$

oder, weil $\sin. A = \sin. (180° - 2 B) = \sin. 2 B$ gefunden wird

$$a : BF = \sin. B : \sin. 2 B$$

oder weil $\sin. 2 B = \sin. (B + B) = 2 \sin. B. \cos. B.$ nach § 23 gefunden wird

$$a : BF = \sin. B : 2 \sin. B. \cos. B.$$

Theilen wir daher die beyden letzten Glieder durch sin. B, so finden wir endlich

$$a : BF = 1 : 2.\ \text{cos.}B$$

und hieraus entspringt die Gleichung

$$\text{cos.}\ B = \frac{BF}{2a}$$

bey welcher wir nicht vergessen müssen, wenn wir mit Logarithmen rechnen, zu dem Logarithmen von BF noch den log. sin. 90° hinzuzusetzen, weil diese Linie eigentlich mit 1 oder sin. 90° noch muß vervielfältiget werden, wie solches aus der letzten Verhältnißgleichung zu ersehen, obgleich dieses in der Rechnung mit Zahlen weiter keinen Einfluß hat.

Aus der hier gegebenen Auflösung lässet sich nun folgende Regel ziehen:

1°. Wie sich verhält die eine der Seiten, welche den gesuchten Winkel einschließen, zur Summe der beyden andern Seiten, eben so verhält sich der Unterschied, welcher entstehet, wenn man die andere Seite, so den gesuchten Winkel einschließet, von der Seite abzieht, welche diesem Winkel gegenüber liegt, zu einer vierten Proportional-Linie.

2°. Die nach 1° gefundene vierte Proportional-Linie ziehe man von der ersten Proportional-Linie ab, und theile den Rest durch die doppelte andere Seite, welche den gesuchten Winkel einschließen, so kommt der *Cosinus* des gesuchten Winkels heraus.

Diese Regeln lassen sich zwar ganz allgemein anwenden, um jeden beliebigen Winkel eines Dreyeckes zu bestimmen, allein da ich nicht bey einem jeden meiner Leser die algebraischen Mittel, durch das Zusammenzählen und Abziehen, Größen gehörig zu verbinden, voraussetzen darf, so rathe ich immer die größte von den beyden Seiten, so den gesuchten Winkel einschließen, zum ersten Proportional-Gliede zu nehmen, und niemalen denjenigen Winkel, welcher der

der kleinsten Seite gegenüber liegt, zuerst zu suchen, sondern vielmehr zuförderst einen der beyden andern Winkel nach dieser Regel zu berechnen, um vermittelst desselben den gesuchten Winkel nach dem ersten Nebenfall des zweyten Hauptfalles zu bestimmen.

Da $BF = b - \frac{(c + a)(c - a)}{b} = \frac{b^2 - (c + a)(c - a)}{b.}$ ist gefunden worden, so wird auch ganz allgemein, weil $\text{cos. } B = \frac{BF}{2a}$ ist, wenn man hier den für BF gefundenen Werth setzt,

$$\text{cos. } B = \frac{b^2 - (c + a)(c - a)}{2ab}$$

nur lässet sich diese Formel nicht wohl durch Logarithmen berechnen, es müßte denn $(c + a)(c - a) = m^2$, mithin

$m = \sqrt{(c + a)(c - a)}$ gesetzt werden, in welchem Falle wir

$$\text{cos. } B = \frac{b^2 - m^2}{2ab} = \frac{(b + m)(b - m)}{2ab}$$

erhalten.

Endlich so wollen wir auch noch ein anderes Mittel angeben, diesen Fall geradehin bequem durch Logarithmen aufzulösen. In der Absicht bemerken wir, daß, wenn wir Fig. 9. $AB = a$, $BC = b$ und $AC = c$ setzen, auch gefunden werde $DC = b + a$ und $EC = b - a$. Nun ist aber in dem Dreyecke DCF

$$\text{sin. } 90 : \text{sin. } CDF = DC : CF$$

und wenn AG mit EC gleichlaufend gezogen wird, so erhalten wir $AG = EC = b - a$ und $AGF = DCF$, mithin

$$\text{sin. } 90° : \text{sin. } DCF = AG : AF.$$

Aus

Aus der ersten Verhältnißgleichung folgt nun, weil sin. CDF = sin. (90° — DCF), gefunden wird,

$$CF = DC.\ \text{cos}.\ DCF,$$

und aus der zweyten Verhältnißgleichung erhalten wir $AF = AG.\ \text{sin}.\ DCF$.

Da nun nach dem Pythagorischen Lehrsatz immer $AC^2 = CF^2 + AF^2$ gefunden wird, so ist auch $AC^2 = DC^2.\ \text{cos}.\ DCF^2 + AG^2.\ \text{sin}.\ DCF^2$ oder da nach § 21, $\text{sin}.\ DCF^2 = 1 - \text{cos}.\ DCF^2$ gefunden wird, so erhalten wir auch

$$AC^2 = DC^2.\text{cos}.DCF^2 + AG^2 - AG^2.\text{cos}.DCF^2$$

und indem wir auf beyden Seiten AG^2 hinwegnehmen

$$AC^2 - AG^2 = (DC^2 - AG^2).\ \text{cos}.\ DCF^2,$$

mithin erhalten wir, indem wir beyde Seiten durch $DC^2 - AG^2$ theilen:

$$\frac{AC^2 - AG^1}{DC^2 - AG^2} = \text{cos}.\ DCF^2$$

oder da immer der Unterschied der Quadratzahlen durch ein Product von der Summe und dem Unterschiede ihrer Wurzeln ausgedruckt werden kann, so wird, indem wir die obige Gleichung umgekehrt schreiben:

$$\text{cos}.\ DCF^2 = \frac{(AC + AG)\ (AC - AG)}{(DC + AG)\ (DC - AG}$$

Da nun AC = c, AG = b — a und DC = b — a oben sind gefunden worden, so erhalten wir $AC + AG = c + b - a$; $AC - AG = c - b + a$; $DC + AG = b + a + b - a = 2\,b$, $DC - AG = b + a - b + a = 2\,a$ und daraus finden wir ferner:

$$\text{cos}.DCF^2 = \frac{(c + b - a)}{2\,b} \cdot \frac{(c - b + a)}{2\,a}$$

Nennen wir daher den Winkel B, welcher in dem Dreyecke ABC Fig. 9 der Seite c gegenüber liegt, λ, so

so wird $DBA = 180 - \lambda$ und $DCF = DEA = \frac{1}{2} DBA = 90^\circ - \frac{1}{2}\lambda$, mithin $\cos. DCF = \cos. (90^\circ - \frac{1}{2}\lambda) = \sin. \frac{1}{2}\lambda$, folglich auch $\cos. DCF^2 = \overline{\sin. \frac{1}{2}\lambda}^2$ und dieses giebt endlich folgende Gleichung:

$$\overline{\sin. \tfrac{1}{2}\lambda}^2 = \frac{c + b - a}{2b} \cdot \frac{c - b + a}{2a}$$

welche immer sehr bequem durch Logarithmen berechnet werden kann, so wie wir dieses sogleich umständlich in folgenden Beyspielen zeigen wollen.

I. Beyspiel. Es seyn in dem Dreyecke Fig. 14. die drey Seiten $AB = 519$, $BC = 873$ und $CA = 756$ Fuß gegeben, so ist, wenn wir die kleinste Seite a, die mittlere c und die größte b nennen, $a = 519$, $b = 873$ und $c = 756$, und B derjenige Winkel, welcher von der kleinsten und größten Seite eingeschlossen wird, und den wir nun folgendermaßen nach den oben gegebenen Regeln bestimmen können.

$c = 756$	log. 1275	= 3. 1055102
$a = 519$	log. 237	= 2. 3747483
$c + a = 1275$	Summe	= 5. 4802585
$c - a = 237$	log. 873	= 2. 9410142
	log. CF	= 2. 5392443

folglich $CF = 346,1$ und $BF = 873 - 346,1 = 526,9$.

Da nun $2a = 1038$, so erhalten wir ferner:

log. sin. 90° + log. BF	=	12 7217282
log. 2 a = log. 1038	=	3. 0161974
log. cos B = log. cos. 59. 29½′	=	9. 7055308.

Es ist demnach der Winkel $B = 59^\circ. 29\frac{1}{2}'$ und nun finden wir einen von den beyden andern Winkeln, indem wir nach Anleitung des ersten Nebenfalles vom zweyten Hauptfalle schließen

$$756 : 519 = \sin. B : \sin. C.$$

Die

Die Rechnung giebt C = 36°. 16′ und folglich wäre A = 84°. $14\frac{1}{2}$.

Nach eben den Regeln kann nun der Winkel A des Dreyeckes ABC Fig. 14 gefunden werden, wenn wir nur schließen

756 : 873 + 519 = 873 — 519 : vierten Gliede, und die Rechnung kann, wie folget, durch Logarithmen geschehen:

log. (873 — 519) = log. 354 = 2. 5490033
log. (873 + 519) = log. 1392 = 3. 1436392
Summe = 5. 6926425
log. 756 = 2. 8785218
log. 651,8 = 2. 8141207

und 756 — 651,8 = 104,2 Fuß.

Demnach ist ferner

log. sin. 90° + log. 104,2 = 12. 0174677
log. 2. 519 = log. 1038 = 3. 0161974
log. cos. A = log. cos. 84°. 15′ = 9. 0012703

und folglich A = 84°. 15′.

Hätten wir hingegen geradezu den Winkel C finden wollen, so würden wir auch folgendermaßen haben schließen müssen

756 : 519 + 873 = 519 — 873 : vierten Gliede, und wir würden eben so, wie vorhin, für das vierte Glied der Verhältnißgleichung, die Zahl 651, 8 bekommen, allein, da das dritte Glied dieser Verhältnißgleichung negativ ist, so muß auch das vierte Glied negativ seyn, und man muß daher hier mit diesem Gliede auch umgekehrt verfahren, als oben, wo wir es von 756 abgezogen haben, wir müssen es demnach zu 756 hinzusetzen, und somit kommt für die Summe 756 + 651, 8 die Zahl 1407, 8, womit wir ferner, wie folget, verfahren.

log.

log. sin. 90° + log. 1407,8 = 13. 1485410
log. 2. 873 = log. 1746 = 3 2420442

log. cos. C = log. cos. 36. 16′ = 9. 9064968
und C = 36°. 16′.

Die drey gefundene Winkel sind demnach B = 59°. 29½′, A = 84°. 15′ und C = 36°. 16′, davon die Summe 180°. c½′ von 180° nur um ½ Minute verschieden ist, welcher kleiner Unterschied bloß daher rühret, daß wir in den dreyen verschiedenen Rechnungen auch nicht immer alles bis auf die geringsten Kleinigkeiten genau genommen haben, da es uns schon hier genug war, nicht um mehrere Minuten auf jeden berechneten Winkel zu fehlen.

Uebrigens können wir auch den Winkel C folgendermaßen finden, wenn wir schließen:

873 : 519 + 756 = 519 — 756 : vierten Gliede:
log. (519 — 756) = log. — 237 = 2. 3747483
log. (519 + 756) = log. + 1275 = 3. 1055102

Summe = 5. 4802585
log. 873 = 2. 9410142

log. — 346,1 = 2. 5392443
mithin auch hier 873 + 346,1 = 1219,1,

und nun erhalten wir ferner:

log. sin. 90° + log. 1219,1 = 13. 0860393
log. 2. 756 = log. 1512 = 3 1795518

log. cos. C = log. cos. 36°. 19′ = 9. 9064875

Demnach C = 36°. 16′, welcher Werth von C mit dem oben gefundenen völlig zutrift.

Wollen wir nunmehro den Winkel B nach dem auf der 92. Seite erklärten Verfahren bestimmen, so können wir uns hierzu des S. 94 berechneten Werthes von log. (c + a) (c — a) = 5,4802585 bedienen, denn

hieraus

Hieraus wird ferner log. $\sqrt{(c + a)(c - a)} =$ 2,7401292 gefunden, und dieses giebt m = 549,7, mithin b + m = 873 + 549,7 = 1422,7 und b — m = 873 — 549,7 = 323,3.

Nun kann die fernere Rechnung mit Logarithmen, wie folget, geführet werden.

log. (b + m) = log. 1422,7 = 3.1531133
log. (b — m) = log. 323,3 = 2.5096057

log. (b + m) (b — m) = . . 5.6627190
log. 2 a = log. 1038 = . . 3.0161974

log. $\frac{(b + m)(b - m)}{2a}$ = . . 2.6465216
log. b = log. 873 = . . 2.9410142

log. cos. B = log. 59°. 30′ = . 9.7055074

und folglich B = 59°. 30′, welches von dem, was wir bereits oben gefunden haben, nur um ½ Minute verschieden ist.

Wollten wir übrigens die Rechnung bloß mit Zahlen verrichten, so könnten wir folgendermaßen verfahren: $b^2 = 873^2 = 762129$, c + a = 756 + 519 = 1275, c — a = 756 — 519 = 237 und (c + a) (c — a) = 1275. 756. = 302175, mithin $b^2 - (c + a)(c - a) = 459954$.

Ferner ist 2 a b = 1038. 873 = 906174, und wenn diese letzte Zahl in die vorhin gefundene getheilet wird, so erhalten wir cos. B = + 0,5075780, woraus sich mittelst der Tafeln B = 59°. 30′, so wie vorhin findet.

Am allerbequemsten lässet sich aber ein jeder der dreyen Winkel, mittelst der Formel S. 94 durch Logarithmen berechnen, wenn wir nur in allen Fällen für c diejenige Seite nehmen, welche dem gesuchten Winkel gegenüber liegt, übrigens aber a mit b willkührlich verwechseln; um dieses desto deutlicher zu

 zeigen,

zeigen, werde ich hier, nach dieser Formel, jeden der dreyen Winkel A, B, C des Dreyeckes ABC Fig. 14 besonders berechnen.

Es sey demnach zuförderst der Winkel A zu suchen, so setze man $c = 873$, $a = 519$, und $b = 756$, so wird $c + b - a = 873 + 756 - 519 = 1110$ und $c - b + a = 873 - 756 + 519 = 636$, folglich

$\log. (c + b - a) = \log. 1110 = 3.0453230$
$\log. (c - b + a) = \log. 936 = 2.8034571$

$\log. (c + b - a)(c - b + a) = 5.8487801$
$\log. 2b = \log. 1512 = \ldots 3.1795518$

2.6692283
$\log. 2a = \log. 1038 = \ldots 3.0161974$

$\log. \overline{\sin. \tfrac{1}{2}\lambda}^{2} = 2 \log. \sin. \tfrac{1}{2}\lambda = 9.6530309$
$\log. \sin. \tfrac{1}{2}\lambda = \log. \sin. 42^{\circ}. 7\tfrac{1}{4}' = 9.8265154$

und hieraus $\tfrac{1}{2}\lambda = 42^{\circ}. 7\tfrac{1}{4}$ und $\lambda = 84^{\circ}. 14\tfrac{1}{2}$, folglich, weil λ immer den gesuchten Winkel vorstellt, so ist hier $A = 84^{\circ}. 14\tfrac{1}{2}'$.

Wollten wir auf eben die Art den Winkel B berechnen, so müßten wir $c = 756$, $a = 519$ und $b = 873$ nehmen, und somit würde $c + b - a = 756 + 873 - 519 = 1110$ und $c - b + a = 756 - 873 + 519 = 402$ gefunden werden.

Und nun ergiebt sich ferner:

$\log. (c + b - a) = \log. 1110 = 3.0453230$
$\log. (c - b + a) = \log. 402 = 2.6042261$

$\log. (c + b - a)(c - b + a) = 5.6495491$
$\log. 2b = \log. 1746 = \ldots 3.2420442$

2.4075049
$\log. 2a = \log. 1038 = \ldots 3.0161974$

$\log. \overline{\sin. \tfrac{1}{2}\lambda}^{2} = 2 \log. \sin. \tfrac{1}{2}\lambda \ldots 9.3913075$
$\log. \sin. \tfrac{1}{2}\lambda = \log. \sin. 29^{\circ}. 44\tfrac{3}{4}' = 9.6956537$

und

und hieraus $\frac{1}{2}\lambda = 29^\circ.\ 44\frac{3}{4}'$, folglich $\lambda = 59^\circ.\ 29\frac{1}{2}'$ und mithin auch in diesem Falle $B = 59^\circ.\ 29\frac{1}{2}'$.

Endlich so finden wir auf eben die Art den Winkel C durch folgende Rechnung, wenn wir $c = 519$, $b = 873$ und $a = 756$ setzen

$$c + b - a = 519 + 873 - 756 = 636$$
$$c - b + a = 519 - 873 + 756 = 402.$$

und hieraus

$$\log.(c + b - a) = \log.\ 636 = 2.\ 8034571$$
$$\log.(c - b + a) = \log.\ 402 = 2.\ 6042261$$
$$\log.(c + b - a)(c - b + a) = 5.\ 4076832$$
$$\log.\ 2\,b = \log.\ 1746 = \ldots\ 3.\ 2420442$$
$$2.\ 1656390$$
$$\log.\ 2\,a = \log\ 1512 = \ldots\ 3.\ 1795518$$
$$\log.\ \text{sin}.\ \tfrac{1}{2}\lambda = 2\log.\ \text{sin}.\ \tfrac{1}{2}\lambda = 8.\ 9860872$$
$$\log.\ \text{sin}.\ \tfrac{1}{2}\lambda = \log\ \text{sin}.\ 18^\circ.\ 8' = 9.\ 4930436$$

folglich $\frac{1}{2}\lambda = 18^\circ.\ 8'$ und $\lambda = 36^\circ.\ 16'$. Da nun in diesem Falle λ den gesuchten Winkel C vorstellet, so wird auch hier $C = 36^\circ.\ 16'$ gefunden.

Anmerkung. Wir haben hier in den dreyen letzten Rechnungen beständig log. 2 a von einer Zahl abgezogen, die kleiner als log. 2 a selbsten war, und doch immer einen beträchtlichen Rest erhalten, eben so haben wir diesen Rest von neuem mit 2 getheilet und zum Quotienten dennoch eine größere Zahl als die getheilte gefunden. Ich halte es daher für nöthig zu erinnern, daß diese scheinbare Widersprüche sogleich wegfallen, wenn wir uns nur immer, im ersten Fall, die Zahl, von welcher log. 2 a soll hinweggenommen werden, und im andern Fall die Zahl, welche für $\overline{\log.\ \text{sin}.\ \frac{1}{2}\lambda}^{\,2}$ gefunden ist, und die noch durch 2 getheilet werden muß, um 10 vergrößert vorstellen. Dieses rührt nemlich bloß daher, weil wir immer den Halbmesser gleich Eins angenommen haben, und in den Tabellen die Logarithmen der Sinus wirklich um 10 größer sind, als sie seyn sollten. Will man daher bey dieser Auflösung

recht sicher seyn, sich nicht zu irren, so kann man gleich zu Anfang der Rechnung die Zahl 20 hinzurechnen, so wie wir dieses jetzt im zweyten Beyspiele zeigen wollen.

II. Beyspiel. Es sey AB = 273, BC = 315 und AC = 511, so können wir nach der Regel S. 91 den Winkel B dieses Dreyeckes folgendermaßen finden, wenn wir schließen:

315 : 511 + 273 = 511 — 273 : vierten Gliede.

log. (511 — 273) = log. 238 = 2. 3765770
log. (511 + 273) = log. 784 = 2. 8943161

Summe = 5. 2708931
log. 315 = 2. 4983106

log. 592,36. = 2. 7725825

und 315 — 592,36 = — 277,36

log. sin. 90° + log. — 277,36 = 12. 4430438
log. 2. 273 = log. 546 = , , 2. 7371926

log. cos. B = log. cos. 59.° 28′ = 9. 7058512

Weil aber hier der cos. B negativ gefunden wird, so wird B = 180° — 59°. 28′ = 120°. 32′.

Wollen wir hingegen die Rechnung nach der, S. 92 angegebenen Formel führen, so erhalten wir aus der vorhin gefundenen Summe unmittelbar, wenn wir c = 511 und a = 273, b aber 315 nehmen log. m^2 = 5. 2708931, log. m = 2. 6354465 und m = 431,96.

b + m = 315 + 431,96 = 746,96
b — m = 315 — 431,96 = —116,96
log. (b + m) = log. + 746,96 = 2. 8732973
log. (b — m) = log. — 116,96 = 2. 0680374

davon die Summe = 4. 9413347
log. 2 a = log. 546 = , , 2. 7371926

2. 2041421
log. b = log. 315 = , , 2. 4983106

log. cos. B = log. cos. 59°. 28′ = , 9. 7058315

weil

weil aber $b - m = -116{,}96$ ist gefunden worden, so ist auch cos. B negativ, mithin, wie vorhin $B = 180^\circ - 59^\circ.\ 28' = 120^\circ\ 32'$.

Wollen wir die Rechnung mit Zahlen verrichten, so finden wir gleichermaßen auf S. 92 hierzu die nöthige Anleitung, denn es wird
$b^2 = 99225$, $c + a = 784$, $c - a = 238$, und $(c + a)(c - a) = 186592$, folglich $b^2 - (c + a)(c - a) = -87367$.

Ferner erhalten wir $2ab = 2.273.315 = 171990$ und, wenn wir mit dieser Zahl die vorhin gefundene theilen, cos. $B = -0{,}5079772$, und $B = 180^\circ - 59^\circ\ 28' = 120^\circ.\ 32$ eben so, wie oben.

Endlich so können wir auch den gesuchten Winkel B nach der Formel S. 94 sehr bequem folgendermaßen berechnen:

$$c + b - a = 511 + 315 - 273 = 553$$
$$c - b + a = 511 - 315 + 273 = 469$$

und hieraus wird ferner, wenn wir mit Logarithmen rechnen:

$$20 + \log.(c + b - a) = 20 + \log. 553 = 22.7427251$$
$$\log.(c - b + a) = 469 = 2.6711728$$
$$\text{davon die Summe} = 25.4138979$$
$$\log. 2b = \log. 2.315 = \log. 630 = 2.7993405$$
$$22.6145574$$
$$\log. 2a = \log. 2\,273 = \log. 546 = 2.7371926$$
$$\log. \sin.^2 \tfrac{1}{2}\lambda = 2 \log. \sin. \tfrac{1}{2}\lambda = 19.8773648$$
$$\log. \sin. \tfrac{1}{2}\lambda = \log. \sin. 60^\circ.\ 16' = 9.9386824$$

Es ist demnach $\lambda = 120^\circ.\ 32' = B$, so wie wir eben dieses schon auf drey verschiedene Arten gefunden haben.

§. 65.

Diese Beyspiele mögen zureichen, uns von der Anwendung der oben erklärten Lehrsätze und Regeln einen vollständigen Begrif zu geben. Ich hoffe auch, daß diejenigen meiner Leser, welche das, bis jetzt vorgetragene, gehörig eingesehen haben werden, nicht leicht über irgend einen Fall verlegen seyn sollen, wo aus dreyen in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreyeckes, die andern drey Stücke desselben gefunden werden müssen. Wir können demnach hier mit den Lehrsätzen zur Auflösung der geradlinigten Dreyecke schließen, und nunmehro zeigen: wie dieselben angewendet werden müssen, um einige Aufgaben mit größerer Genauigkeit als durch bloße Zeichnungen aufzulösen. Das bisher vorgetragene, zeiget uns deutlich genug, wie man dabey verfahren müsse, und daß auch die dabey vorfallenden Rechnungen sich leicht und bequem anstellen lassen; daher werden wir uns bey den Anwendungen der Dreyeck-Meßkunst überhaupt nur kurz fassen.

Anwendung der Dreyeck-Meßkunst zur Auflösung einiger Aufgaben.

§. 66.

Einen auf dem Papiere gegebenen Winkel, ohne Transporteur, vermittelst eines bloßen Maaßstabes auszumessen, und die Anzahl der Grade desselben zu bestimmen.

Es sey ABC Fig. 16 der gegebene Winkel, so nehme man auf dem Schenkel AB eine beliebige Entfernung Ba, trage dieselbe auf BC von B gegen C in b, und messe mittelst eines richtigen Maaßstabes sowohl Ba als die

die Entfernung der Punkte a und b von einander. Stellt man sich nun von a nach b eine gerade Linie gezogen vor, so sind in dem gleichschencklichten Dreyecke alle Seiten bekannt, und man erhält

$$Ba : ab = \sin.\, b : \sin.\, B$$

Es ist aber $b = \frac{180^\circ - B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} B$

folglich wird $\sin.\, b = \cos.\, \frac{1}{2} B$. Da nun $\sin.\, B = \sin.\, (\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} B) = 2 \sin.\, \frac{1}{2} B.\ \cos\, \frac{1}{2} B$ so verwandelt sich die vorige Verhältnißgleichung in

$$Ba : ab = \cos.\, \tfrac{1}{2} B : 2 \sin.\, \tfrac{1}{2} B.\ \cos.\, \tfrac{1}{2} B$$

und wenn man die beyden letzten Glieder derselben mit $\cos.\, \frac{1}{2} B$ theilet, in

$$Ba : ab = 1 : 2 \sin\, \tfrac{1}{2} B.$$

woraus wir

$$\sin.\, \tfrac{1}{2} B = \frac{ab}{2\, Ba}$$

finden. Und dieses giebt uns folgende Regel zu Auflösung dieser Aufgabe.

1° Trage man auf die Schenkel des gegebenen Winkels, von der Spitze desselben gleich große Entfernungen, messe auf einem richtigen Maaßstabe jede derselben genau, und merke die Summe der für beyden Entfernungen gefundenen Theile.

2° Man messe auf eben demselben Maaßstabe, wie groß die Entfernung der beyden Endpunkte ist, und theile die gefundene Anzahl der Theile des Maaßstabes durch die nach 1° gefundenen Summe der auf die Schenkel des Winkels getragenen Entfernungen.

3° Den nach 2° gefundenen Quotienten schlage man in den Tabellen unter der Aufschrift *Sinus*

gehörig auf, und nehme den entsprechenden Winkel doppelt, so kommt die gesuchte Anzahl der Grade des gegebenen Winkels heraus.

Beyspiel. Es sey Ba = Bb = 1728 Theile eines Maaßstabes gefunden worden, so ist die Summe beyder Entfernungen 3456 Theile.

Ist nun a von b, um 897 Theile des nehmlichen Maaßstabes entfernt, so wird, wenn wir diese Entfernung durch die vorhin gefundene Summe theilen, der Quotient = 0,5190972.

Schlagen wir nun in den Tabellen nach, welcher Sinus dem gefundenen Quotienten entspricht, so finden wir, daß es der Sinus von $31^\circ\ 16\frac{1}{3}'$ ist; nehmen wir daher den Winkel $31^\circ.\ 16\frac{1}{3}'$ doppelt, so kommen $62^\circ.\ 32\frac{2}{3}'$ oder in runder Zahl $62^\circ\ 33'$ für den gegebenen Winkel heraus.

Anmerkung. Daß auch hier die Rechnung bequem mit Logarithmen angestellt werden könne, erfordert beynahe keine Erinnerung, nur ist zu merken, daß weil die Logarithmen der Sinus in den Tabellen um 10 größer angenommen worden, als sie an und vor sich sind, man zuförderst zu den Logarithmen der zu theilenden Zahl, 10 hinzu rechnen müsse, bevor man den Logarithmen des Theilers davon wegnimmt; so finden wir bey dem vorigen Beyspiele.

$$\begin{aligned} 10 + \log.\ 897 &= 12.\ 9527924 \\ \log.\ 1728 &= \underline{3.\ 2375437} \\ \log.\ \sin.\ 31^\circ.\ 16\tfrac{1}{3}' &= 9.\ 7152487 \end{aligned}$$

mithin den gesuchten Winkel, eben so wie oben, gleich $62^\circ.\ 32\frac{2}{3}'$

Uebrigens ist dieses Mittel, die Größe eines Winkels zu bestimmen, viel sicherer, als wenn bloß der Transporteur dazu gebrauchet wird. Denn es ist viel leichter einen recht genau getheilten Maaßstab als einen völlig zuverläßigen Transporteur zu erhalten, überdem muß aber ein Werkzeug, von der letzten Art, schon groß seyn, wenn es die Winkel erträglich genau

messen

messen soll, dahingegen wir hier völlige Freyheit haben, auf die Schenkel des auszumessenden Winkels, so große Entfernungen zu tragen, als es die Größe des Papieres erlaubet; ein Vortheil, der bey großen Zeichnungen sehr wesentlich ist.

§. 67.

Es wird auf dem Papiere die Lage einer Linie gegeben, und in derselben ein Punkt bestimmt, bey welchem ein Winkel beschrieben werden soll, der eine gegebene Anzahl Grade enthalte.

Wir sehen hier sogleich, daß diese Aufgabe nichts anders ist, als der umgekehrte Fall der im vorigen §. abgehandelten Aufgabe, wir können daher auch hier die Auflösung aus der vorigen unmittelbar herleiten, denn die gefundene Formel $\sin. \frac{1}{2} B = \frac{ab}{2Ba}$ verwandelt sich, wenn wir beyde Seiten derselben mit 2 Ba vervielfältigen, in folgende $2\,Ba \sin \frac{1}{2} B = ab$ und es ist klar, daß die Linie ab Fig. 16 immer leicht gefunden werden kann, sobald nur der Winkel B gegeben, und Ba willkührlich ist angenommen worden.

Es ist uns also nunmehr leicht, einen jeden gegebenen Winkel an jeder gegebenen Linie nach folgender Vorschrift gehörig aufzutragen.

1°. Beschreibe man mit einer beliebigen Oefnung des Zirkuls, aus dem bestimmten Punkte, von der gegebenen Linie an, einen Kreisbogen gegen die Seite, wohin die Oefnung des Winkels soll gerichtet seyn, und sehe auf einem richtig getheilten Maaßstabe nach, wie viel Theile desselben die angenommene Oefnung des Zirkuls beträgt.

2°. Mit dieser, auf dem Maaßstabe gemessenen Oefnung des Zirkuls, doppelt genommen, vervielfältige man den *Sinus* der Hälfte des in Graden angegebenen und zu verzeichnenden

Winkels, und trage die dadurch bestimmte Anzahl der Theile des gebrauchten Maasstabes, von demjenigen Punkte an, wo die gegebene gerade Linie durch den beschriebenen Bogen geschnitten wird, in diesen Bogen gehörig auf, und bemerke den Endpunkt derselben.

3°. Ziehe endlich von dem gefundenen Punkte nach dem Mittelpunkt des Kreisbogens eine gerade Linie, so wird diese mit der gegebenen Linie den verlangten Winkel einschließen.

Beyspiel. Es sey an der gegebenen Linie AC Fig. 17 in dem Punkte B ein Winkel von 131 Graden dergestalt zu beschreiben, daß die Oefnung desselben über der Linie AC gegen die rechte Seite gerichtet sey, so nehme man einen beliebigen Halbmesser Bb, und beschreibe damit aus B gegen C von der gegebenen Linie AC an, den Kreisbogen ba von benöthigter Länge, und messe Bb auf einem richtigen Maaßstabe, welche Linie wir hier 713 Theile des Maaßstabes annehmen wollen.

Mit 2mal 713 = 1426 Theile des Maaßstabes vervielfältige man den Sinus von der Hälfte des Winkels 131 Graden = sin. 65°. 30′ = 0,9099613, so kommen 1297,6 Theile des Maaßstabes heraus, welche von dem Punkte b an, wo der Kreisbogen ab die gerade Linie AC schneidet, dergestalt in a getragen werden müssen, daß eine gerade Linie von b nach a gezogen, genau 1297,6 Theile des gebrauchten Maaßstabes betrage.

Wird nun von dem gefundenen Punkte a nach dem Mittelpunkt B des Kreisbogens ab eine gerade Linie a B gezogen, so entstehet der Winkel aBb von 131 Graden, wie verlangt ist worden.

Anmerkung. Wollen wir mit Logarithmen rechnen, so würde die Rechnung, wie folget, gemacht werden müssen.

log.

log. 2. Bb = log. 1426	=	3. 1541195
log. sin. $\frac{1}{2}$ B = log. sin. 65°.30′	=	9. 9590229
		13. 1131424
Hiervon ab	-	10. 0000000
log. ab = 1297,6 =	-	3. 1131424

folglich ab = 1297,6 Theile des Maaßstabes, eben so, wie vorhin. Uebrigens, da es uns frey stehet, einen Halbmesser nach Willkühr anzunehmen, so werden wir beynahe alle Rechnung vermeiden können, wenn wir solche Theile des Maaßstabes dazu wählen, welche sich durch runde Zahlen, dergleichen 100, 200, 300 und so weiter sind, ausdrucken lassen, und in diesen Fällen ist es vortheilhafter, die Sinus selbsten, und nicht ihre Logarithmen zu gebrauchen. Eben dieses aber, was ich jetzt hier bemerkt habe, gilt auch ohne alle Veränderung für den vorigen §, und es wird immer leicht seyn, alle Rechnung zu vermeiden, woferne man nur mit einem wohl eingerichtetem System von Maaßstäben versehen ist, weil man sodann darunter einen wählen kann, der sich zu der Zeichnung schicket, und von welchem 500 oder 5000 Theile zum Halbmesser genommen werden können, weil man in diesen Fällen nur nöthig hat, das Comma beym Sinus des halben Winkels gehörig zu verrücken, um sogleich die Anzahl der Theile zu finden, welche man auf den beschriebenen Bogen tragen muß; so würden wir in unserm vorigen Beyspiele, aus dem gegebenen Winkel 131°, sogleich sin. $\frac{1}{2}$. 131° = sin. 65$\frac{1}{2}$° = 0,9099613, mittelst der Tafeln finden. Hätten wir nun von einem schicklichen Maaßstabe 500 Theile zum Halbmesser Bb angenommen, so wäre 2 Bb = 1000, und folglich ab = 2. 500. sin. 65$\frac{1}{2}$° = 909,9613, wofür wir in runder Zahl 910 Theile unseres Maaßstabes annehmen könnten.

§. 68.

Wer die im vorigen abgehandelte Auflösungen der Dreyecke durch Rechnungen richtig verstanden hat, dem wird es gar nicht schwer fallen, davon verschiedene Anwendungen in allen Fällen zu machen, wo Dreyecke zu bestimmen vorkommen. Die ganze Lehre der Feldmeßkunst beruhet eigentlich auf die

Mittel,

Mittel, wodurch aus einigen Stücken eines Dreyeckes andere gefunden werden können, und somit erhellet, daß sich die sämmtlichen Sätze der Dreyeck-Meßkunst hier anwenden lassen. Ich würde daher verschiedene Fälle dieser letzten Wissenschaft als Beyspiele zur Anwendung der Dreyeck-Meßkunst wählen können, allein, da ich nicht gerne zu weitläuftig werden möchte, so sehe ich mich genöthiget, nur wenige Fälle durchzugehen, die hier zu unserer Absicht hinreichen, und das übrige bis dahin zu versparen, wo das bereits unter der Presse befindliche kleine Werk über die Feldmeßkunst ans Licht treten wird, und worinnen ich umständlich zeigen werde, wie man alle vorfallende Fälle durch Rechnung auf das schärfeste und genaueste auflösen und bestimmen könne.

§. 69.

Die Weite eines Ortes, zu dem man nicht kommen kann, aus zween angenommenen Standpunkten, zu messen.

Es sey A Fig. 18. ein Ort, zu dem man wegen vorliegendem Wasser oder andere Hindernisse nicht kommen kann, indem man sich auf der Seite von B oder C befindet; so wähle man auf dieser Seite zwey Standpunkte B und C dergestalt, daß man aus denselben, nicht nur noch A sehen, sondern auch die Entfernung der beyden Punkte B und C von einander, oder die gerade Linie BC messen könne. Hat man nun, mittelst der Kette, einer Schnur, oder eines Maaßstabes die grade Linie BC gehörig gemessen, und durch einen Winkelmesser in B und C die Größe der Winkel bestimmt, welche daselbst der Ort A mit der angenommenen Standlinie machet, so ist es leicht den Winkel A und die beyden Seiten AB, AC des Dreyeckes ABC zu berechnen. Denn es ist dieses der erste Hauptfall, und kann nach Anleitung des §. 56. völlig aufgelöset werden.

§. 70.

Aus der bekannten Entfernung zweyer Oerter von einander, welche durch einen Gegenstand so getrennt sind, daß man von dem einen den andern nicht sehen kann, die Lage eines dritten Ortes, aus welchem man beyde Oerter zwar sehen, aber nur nach dem einen kommen kann, zu bestimmen.

Es seyn A und B Fig. 19. zwey Oerter, welche durch einen Berg, Wald, oder sonsten irgend einen Gegenstand, der die Aussicht von A nach B oder von B nach A hindert, getrennt sind, man will wissen wie weit ein dritter Ort C, von welchem man beyde Oerter A und B zwar sehen, aber nur nach dem letzten Orte B allein kommen kann, von dem ersten Orte A entfernet sey, und welche Lage er überhaupt gegen die beyden Oerter A und B habe.

Da wir aus C nach A und B sehen und nach B kommen können, so können wir den Winkel C und die Linie BC messen, folglich, da AB oder die Entfernung der beyden Oerter A und B gegeben wird, so sind in dem Dreyecke ABC zwo Seiten und ein Winkel, der einer der beyden bekannten Seiten gegenüber liegt, bekannt, und somit kann hier die Auflösung, nach dem ersten Nebenfall des zweyten Hauptfalles geschehen, wozu uns der §. 57. die nöthige Anleitung giebet.

§. 71.

Die Entfernung zweyer Oerter, welche durch irgend einen Gegenstand von einander getrennet sind, zu bestimmen, wenn man einen Standpunkt so annehmen kann, daß sich aus demselben beyde Oerter sehen, und von demselben die Entfernungen messen lassen.

Es seyn A und B Fig. 20 zwey Oerter, die durch einen See, Berg oder Wald von einander so getrennt sind, daß man nicht gerade von A nach B messen kann, so wähle man irgend einen Standpunkt C dergestalt, daß aus demselben nicht nur die beyden Oerter A und B gesehen werden können, sondern daß man auch die Entfernungen AC, BC dieses Standpunktes C von den beyden Oertern A und B auszumessen im Stande sey. Nun messe man, außer den Linien, AC und BC noch den Winkel C, welchen diese Linien bey dem angenommenen Standpunkte C mit einander einschließen, so sind in dem Dreyecke ABC zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, mithin gehört die Auflösung dieser Aufgabe zum zweyten Nebenfall des zweyten Hauptfalles, und wir können daher nach Anleitung des §. 58. die beyden Winkel A und B finden, um daraus ferner nach §. 59. die Seite AB zu berechnen, oder, da wir hier die Winkel A und B nicht zu wissen nöthig haben, so ist es vortheilhafter, die Seite AB geradezu nach §. 60. zu suchen.

§. 72.

Aus den bekannten Entfernungen dreyer Oerter von einander, die Größe des Winkels zu finden, den zwey gerade Linien von zweyen dieser Oertern nach dem dritten Orte gezogen, bey diesem dritten Orte mit einander einschließen.

Es seyn A, B und C Fig. 21. drey Gegenstände, deren Entfernungen AB, BC und AC man kennet, man verlangt zu wissen, wie groß der Winkel C sey, den die beyden von A und B nach C gezogenen geraden Linien AC, BC daselbst einschließen.

Da hier in dem Dreyecke ABC alle drey Seiten stückweise gegeben werden, so kann diese Aufgabe nach dem dritten Hauptfall behandelt werden, wozu wir die Auflösungen §. 64. finden.

§. 73.

Die Entfernung zweyer Oerter von einander zu finden, zu welchen man nicht kommen kann.

Es seyn A und B zwey Oerter, deren Entfernung von einander man bestimmen soll, und zu welchen man weder von C, noch von D kommen kann, so messe man von C nach D die Standlinie CD, und außerdem in C die Winkel ACD, BCD, welche daselbst die Linien AC, BC, so von C nach den beyden Oertern A und B gezogen werden können, mit der Standlinie CD einschließen. Eben so messe man in D die Winkel ADC, BDC, welche AD, BD daselbst mit der Standlinie einschließen.

Da wir annehmen, es seyn in dem Dreyecke ACD, die Winkel ACD, ADC, nebst der Seite CD gemessen worden, so sind in dem Dreyecke ACD zwey Winkel und eine Seite bekannt, folglich können daraus die Seiten AC und AD dieses Dreyeckes berechnet werden, weil hier die Auflösung völlig zum ersten Hauptfall gehöret.

Eben so können wir in dem Dreyecke BCD, die beyden Seiten BC, BD bestimmen.

Haben wir nun die vier Linien AC, AD, BC, BD gefunden, so können wir auf zweyerley Art die Entfernung AB berechnen. Denn erstlich kann in dem Dreyecke ACB aus den beyden bekannten Seiten AC, BC und den eingeschlossenen Winkel ACB = ACD — BCD nach Anleitung des §. 60. die Seite AB gefunden werden, da die Auflösung sich nach dem zweyten Nebenfall des zweyten Hauptfalles behandeln läßt. Auf eben die Art kann aber auch diese Linie aus dem Dreyecke ADB gefunden werden, da uns in demselben die beyden Seiten AD, BD, nebst dem eingeschlossenen Winkel ADB = BDC — ADC bekannt sind.

Es erhellet hieraus genugsam, daß man nur statt den vier Linien AC, AD, BC und BD, deren zwo zu berech-

berechnen nöthig habe, und es ist gleich viel, ob wir AC und BC oder AD und BD berechnen. Indessen wer die Mühe nicht scheuet, wird dennoch wohl thun, beyde Rechnungen zu machen, denn die eine dienet sodann der andern gleichsam zur Probe, und da, wo es auf Genauigkeit ankömmt, wird immer diese Vorsicht sehr zu empfehlen seyn, da überdem die deshalb zu machenden Rechnungen eben keine so große Arbeit erfordern und größtentheils durch Logarithmen geschehen können, so wie wir dieses umständlicher in folgendem Beyspiele zeigen wollen.

Beyspiel. Es sey CD = 2560 Fuß, ferner ACD = 103°, BCD = 37°, ADC = 43°. 25′, und BDC = 127°. 31′, so wird ACB = 103° — 37° = 66° und ADB = 127°. 31′ — 43°. 25′ = 84°. 6′ gefunden.

Hieraus erhalten wir ferner A = 180° — 103° — 43°. 25′ = 33°. 35 und B = 180° — 127°. 31′ — 37° = 15°. 29′, und nun können wir nach §. 56 schließen:

sin. A : CD = sin. ADC : AC

log. sin. ADC = log. sin. 43°. 25′ =	9. 8371456
log. CD = - log. 2560 = -	3. 4082400
	13. 2453856
log. sin. A = log. sin. 33°. 35′ =	9. 7428423
log. AC = log. 3180,85 = - -	3. 5025433

folglich AC = 3180,85 Fuß. Eben so wird

sin. A : CD = sin. ACD : AD

log. sin. ACD = log. sin. 103° = -	9. 9887239
log. CD = log. 2560 = - -	3. 4082400
	13. 3969639
log. sin. A = log. sin. 33°. 35′ = -	9. 7428423
log. AD = log. 4509,43 = - -	3. 6541216

und demnach AD = 4509,43 Fuß.

Eben

Eben so erhalten wir im Dreyecke BCD

sin. B: CD = sin. BCD: BD

log sin. BCD = log. sin. 37° =	9. 7794630
log. CD = log. 2560 = ,	3. 4082400
	13. 1877030
log. sin. B = log. sin. 15°. 29′ =	9. 42644 0
log. BD = log. 5771, 12 = ,	3. 7612600

mithin BD = 5771, 12 Fuß. Endlich wird

sin. B: CD = sin. BDC: BC

log. sin. BDC = log. sin. 127°. 31′ =	9. 8993697
log. CD = log. 2560 = ,	3. 4082400
	13. 3076097
log. sin. B = log. sin. 15°. 29′ =	9. 4264430
log. BC = log. 7606, 18 = ,	3. 8811667

und BC = 7606, 18 Fuß.

Nachdem hierdurch die Linien AC, AD, BD, BC bestimmt sind, so können wir nun die Entfernung AB, sowohl aus dem Dreyecke ACB, als aus dem Dreyecke ADB nach Anleitung des §. 60. berechnen.

Nehmen wir das Dreyeck ACB, so können wir a = BC = 7606, 18, b = AC = 3180, 85 und c = ACB = 66° setzen, und folgendermaßen rechnen, wenn wir auch Fig. 11, AD = m, BD = n, DC = p und die gesuchte dritte Seite AC des Dreyeckes ABC Fig. 11. gleich q nehmen.

log. b = log. 3180,85 = , ,	3. 5025433
log. sin. c = log. sin. 66° = ,	9. 9607302
	13. 4632735
log. sin. 90° = , ,	10. 0000000
log. m = log. 2905, 85 = , ,	3. 4632735

und m = 2905, 85 Fuß.

Ferner wird

log. b = log. 3180,85 =	,	3. 5025433
log. cos. c = log. cos. 66° =	,	9. 6093133
		13. 1118566
log. sin. 90 = ,	,	10. 0000000
log. n = log. 1293,77 =	,	3. 1118566

folglich n = 1293,77 Fuß und p = a — n = 7606,18 — 1293,77 = 6312,41.

Nun ist ferner $m^2 = 8443964,2225$, $p^2 = 39846520,0081$, $m^2 + p^2 = 48290484,2306$ und $q = \sqrt{m^2 + p^2} = 6949,14$ Fuß.

Da nun q immer die gesuchte dritte Seite des Dreyeckes vorstellet, so ist auch hier Fig. 22. AB = 6949,14 Fuß.

Nehmen wir hingegen das Dreyeck ADB, so muß a = BD = 5771,12; b = AD = 4509,43 und c = BDC — ADC = ADB = 84°. 6′ genommen werden, woraus sich ferner ergiebt:

log. b = log. 4509,43 =	,	3. 6541216
log. sin. c = log. sin. 84°. 6′ =		9. 9976933
		13. 6518149
log. sin. 90° = ,	,	10. 0000000
log. m = log. 4485,54 =	,	3. 6518149

mithin m = 4485,54 Fuß.

Eben so wird ferner:

log. b = log. 4509,43 =	,	3. 6541216
log. sin. c = log. cos. 84°. 6′ =		9. 0119616
		12. 6660832
log. sin. 90° = ,	,	10. 0000000
log. n = log. 463,54 =	,	2. 6660832

und somit n = 463,54 Fuß, folglich p = a — n = 5771,12 — 463,54 = 5307,58.

Dem-

Demnach ist auch $m^2 = 20120069{,}0916$; $p^2 = 28170405{,}4564$, $m^2 + p^2 = 48290474{,}5480 =$ und $q = \sqrt{m^2 + p^2} = 6949{,}14$ Fuß, eben so wie vorhin.

Wollten wir übrigens hier nach §. 58. und §. 59. verfahren, so käme bey dem Dreyecke ACB die Rechnung folgendermaßen zu stehen:

$a = 7606{,}18$ $b = 3180{,}85$	$x + y = 180^\circ - c = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ$
$a + b = 10787{,}03$ $a - b = 4425{,}33$	$\frac{x+y}{2} = \frac{114}{2} = 57^\circ$,

und es wird hieraus ferner gefunden:

$$10787{,}03 : 4425{,}33 = \text{tang. } 57^\circ : \text{tang. } \frac{x-y}{2}$$

$$\text{log. tang. } \frac{x+y}{2} = \text{log. tang. } 57^\circ. = 10.1874826$$

$$\text{log. } (a - b) = \text{log. } 4425{,}33 = 3.6459456$$

davon die Summe $= 13{,}8334282$

$$\text{log. } (a + b) = \text{log. } 10787{,}03 = 4{,}0329019$$

$$\text{log. tang. } \frac{x-y}{2} \text{ log. tang. } 32^\circ.\ 17' = 9{,}8005263$$

Demnach ist der halbe Unterschied der unbekannten Winkel $\frac{x-y}{2} = 32^\circ.\ 17'$, und hieraus erhalten wir ferner:

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 57^\circ + 32^\circ.\ 17' = 89^\circ\ 17'.$$

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 57^\circ - 32^\circ.\ 17' = 24^\circ.\ 43'.$$

Es ist demnach in dem Dreyecke ACB der Winkel BAC $= 89^\circ.\ 17'$ und der Winkel ABC $= 24^\circ\ 43'$.

Endlich so schließe man:

$$\text{sin. } x : \text{sin. } c = a : AB.$$

log. a = log. 7606, 18 = .	3. 8811667
log. sin. c = log. sin. 66° =	9. 9607302
davon die Summe =	13. 8418969
log. sin. x = log. sin. 89°. 17′ =	9. 9999660
log. AB = log. 6949, 14 =	3. 8419309

Wir finden demnach auch durch dieses Verfahren die Entfernung der beyden Oerter A und B von einander oder die Linie AB = 6949, 14 Fuß, wie oben.

Anmerkung. Wir haben bey diesen Rechnungen verschiedenemal Logarithmen gebraucht, so wie wir sie unmittelbar aus den ersten Auflösungen gefunden hatten, dieses ist immer sehr anzurathen, indem dadurch die Rechnung selbst um desto genauer wird; so haben wir hier in unserm letzten Beyspiele log.. 7606, 18 = 3. 8811667 genommen, weil wir diesen Logarithmen so S. 113 gefunden haben. Ich habe dieses zu erinnern für nöthig gefunden, damit sich Anfänger hieran nicht stoßen, wenn sie bey einigen Zahlen andere Logaritmen finden als solche aus den Tafeln gefunden werden. Denn obgleich nach den Tafeln log. 7606, 18 = 3. 8811666 gefunden wird, so ist dennoch der obige diesen vorzuziehen, da er unmittelbar aus den nöthigen vorläufigen Rechnungen fließet, die Zahl 7606, 18 hingegen aus demselben nur beyläufig bestimmt ist worden. Uebrigens so ist es klar, daß auf eben die Art: wie wir es hier gezeiget haben, ganze Landschaften behandelt werden können, denn so, wie im vorigen die Lage der beyden Punkte gegen die angenommene Standlinie, sowohl als unter sich, ist bestimmt und berechnet worden, eben so kann auch verfahren werden, wenn die Lage mehrerer Punkte, entweder in Rücksicht der angenommenen Standlinie, oder unter sich, berechnet werden soll, wenn wir nur jedes Paar solcher Punkte eben so behandeln, wie A und B Fig. 22. Man wird vielleicht glauben, daß dieses Unternehmen sehr mühsam sey, und dieses kann hier auch nicht geläugnet werden; indessen ist es dennoch nothwendig, wo Vermessungen etwas ins Große gehen, ohngeachtet man es dennoch selbst in diesem Fall merklich ein-

schränken

schränken kann, wenn man nur die Hauptpunkte einer aufzunehmenden Gegend auf diese Art suchet, das übrige aber, gleichsam von diesen fixen Punkten aus, durch andere einfachere Mittel aufnimmt, und allenfalls durch bloße Zeichnung nach dem Augenmaaß bestimmet, oder wo größere Genauigkeit nöthig ist, die dazu erforderlichen Werkzeuge gebrauchet.

§. 74.

Die Höhe eines Gegenstandes zu bestimmen, welcher auf einer horizontalen Ebene senkrecht stehet, in welcher man von irgend einem Punkt derselben, bis zum Fuß des Gegenstandes kommen, und die Entfernung messen kann.

Es sey AE Fig. 23 ein Thurm, welcher auf der Ebene AB senkrecht stehet, und nichts hindere, bis zum Fuß A desselben, aus einem gewählten Standpunkte B zu kommen. Hier messe man zuförderst die Entfernung des angenommenen Standpunktes B von dem Fuß A des Gegenstandes, und bestimme, mittelst eines in B errichteten Winkelmessers den Winkel CDE, welchen eine, mit dem Horizont AB gleichlaufende Linie CD, mit der von D, nach der Spitze E des Thurmen gezogene gerade Linie bey diesem letzten Punkte einschließet.

Da ich den Fuß DB des Winkelmessers eben sowohl als den Thurm auf der Ebene AB senkrecht annehme, so sind AC und DB, sowohl als CD und AB mit einander gleichlaufend, und das Viereck ABDC ist ein Rechteck, mithin AB = CD und AC = BD. Es kommt demnach hier alles bloß darauf an: die Höhe CE zu finden, welches auch überhaupt sehr leichte ist; denn da das Dreyeck ECD, in welchem CD und der Winkel CDE bekannt sind, bey C rechtwinklicht ist, so erhalten wir nach §. 56, wenn wir AB = a, den Winkel CDE aber α nennen, CED = $90^\circ - \alpha$ und somit ferner:

$$\sin. CED : \sin. CDE = CD : CE$$

oder weil $\sin. CED = \sin. (90 - \alpha) = \cos. \alpha$, $\sin. CDE = \sin. \alpha$ und $CD = AB = a$ gefunden werden,

$$\cos. \alpha : \sin. \alpha = a : CE$$

folglich $$CE = \frac{a. \sin. \alpha}{\cos. \alpha} = a. \text{tang}. \alpha$$

Verstehen wir daher unter h die gesuchte Höhe des Thurmes und unter b die Höhe des Mittelpunktes unseres Winkelmessers über der Ebene AB, so ist

$$h = b + a. \text{tang}. \alpha$$

oder man vervielfältige die gefundene Entfernung mit der *Tangente* des gemessenen Winkels, und füge das gefundene Produkt zur Höhe des Winkelmessers hinzu, so kommt die gesuchte Höhe des Gegenstandes heraus.

Anmerkung. Auf diese leichte Art lässet sich jede Höhe messen, wenn man nur bis zu dem Punkt der horizontalen Ebene kommen kann, über welche die Spitze des Gegenstandes, dessen Höhe eigentlich gefunden werden soll, senkrecht stehet, wie Fig. 23; hätte hingegen die Spitze eine solche Lage über der Grundfläche, wie Fig. 24, und es ließe sich der Punkt B, wo die lothrechte Linie EB den Horizont AB träfe, nicht mit Zuverläßigkeit bestimmen, oder wäre man wohl gar durch irgend eine Hinderniß vom Fuß des Thurmes abgeschnitten, so kann die Auflösung durch folgende Aufgabe geschehen.

§. 75.

Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, der zwar auf einer horizontalen Ebene senkrecht stehet, zu dem man aber nicht kommen kann.

Es sey Fig. 24 BE ein Gegenstand, der auf der horizontalen Ebene AB stehet, zu dem man aber aus A nicht kommen kann, so nehme man in der Ebene ABE, welche auf dem Horizont senkrecht stehet, noch einen

andern Punkt G an, und messe die Entfernung AG; eben so messe man bey C und D die Winkel ECF, EDF, welche bey diesen Punkten, die mit der Horizontallinie AB gleichlaufende Linie CF mit dem von C und D nach der Spitze des Gegenstandes laufende Linien CE und DE einschließen.

Aus diesen gemessenen dreyen Stücken findet sich nun die Höhe des Gegenstandes folgendermaßen:

Weil EDF ein äußerer Winkel des Dreyeckes ECD ist, so wird CED = EDF — ECF, und

$$\text{sin. CED} : \text{sin. ECF} = \text{CD} : \text{DE},$$

folglich, da aus dem, was wir im vorigen §. gezeiget haben, leicht eingesehen wird, daß CD = AG; mithin eine bekannte Größe sey, so wird DE durch das vierte Proportional-Glied gefunden.

Nachdem DE gefunden ist, so schließe man ferner:

$$\text{sin. DFE} : \text{sin. EDF} = \text{DE} : \text{EF}$$

oder da DFE = 90° ist, folglich sin. DFE = sin. 90° = 1 gefunden wird

$$1 : \text{sin. EDF} = \text{DE} : \text{EF}$$

und wenn endlich zu EF noch BF = DG = CA = der Höhe des Winkelmessers hinzukommt, so wird die verlangte Höhe des Gegenstandes EB gefunden.

Es lässet sich diese Aufgabe etwas allgemeiner behandeln, wenn wir die Standlinie AG = a den Winkel ECF = β und den Winkel EDF = α setzen, denn so wird CED = $\alpha - \beta$ und

$$\text{sin.}(\alpha - \beta) : \text{sin.}\,\beta = \text{a} : \text{DE},$$

folglich DE = $\dfrac{\text{a sin.}\,\beta}{\text{sin.}(\alpha - \beta)}$, und wenn wir diesen Werth in die letzte Verhältnißgleichung setzen:

$$1 : \text{sin.}\,\alpha = \frac{\text{a. sin.}\,\beta}{\text{sin.}(\alpha - \beta)} : \text{EF},$$

folglich $EF = \frac{a.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \alpha}{\sin.\ (\alpha - \beta)}$. Setzen wir daher die Höhe des Gegenstandes $EB = h$ und die Höhe des Winkelmessers $BF = b$, so wird ganz allgemein

$$h = \frac{a\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \alpha}{\sin,\ (\alpha - \beta)} + b.$$

eine Formel, die sehr bequem durch Logarithmen berechnet werden kann, will man indessen mit Zahlen rechnen, so wird nach §. 23 Nro. 2. $\sin.\ (\alpha - \beta) = \sin.\ \alpha\ \cos.\ \beta - \cos.\ \alpha.\ \sin.\ \beta$ gefunden, und wir erhalten, indem wir diesen Werth in die letzte Formel setzen

$$h = \frac{a.\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ \alpha}{\sin.\ \alpha\ \cos.\ \beta - \cos.\ \alpha.\ \sin.\ \beta} + b$$

Theilen wir daher oben und unten mit $\sin.\ \beta.\ \sin.\ \alpha$, und erinnern uns, daß $\frac{\cos.\ \beta}{\sin.\ \beta} = \cot.\ \beta$ und $\frac{\cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha} = \cot.\ \alpha$ ist, so wird bloß

$$h = \frac{a}{\cot.\ \beta - \cot.\ \alpha} + b$$

gefunden.

§. 76.

Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn dasselbe auf einer Anhöhe so stehet, daß man zwar aus zween Standpunkten den Fuß sehen, aber nicht zu demselben in gerader Linie kommen kann.

Hier muß man zwey Fälle unterscheiden: entweder lassen sich die Standpunkte, die ich immer in einer, durch die Spitze und den Fuß des Gegenstandes gelegten Scheitel-Ebene voraussetze, in einer horizontalen Ebene nehmen, oder nicht. Da aber der letzte Fall nur ein besonderer Fall des ersten ist, so wollen wir zufördest den ersten auflösen, weil daraus sodann der zweyte fast von selbsten folget.

Es

Es sey CD Fig. 25 ein lothrechter Gegenstand, welcher auf einer Anhöhe BD stehet, und es lasse sich die Standlinie nirgend in einer Ebene nehmen, sondern man sey genöthiget, sie so zu wählen, wie es die Figur zeiget.

Man setze in einen der beyden Standpunkte, wie hier in A den Winkelmesser, in B aber eine schwarze Tafel mit einem weißen Kreuze, welche man an einer Stange so befestigen muß, daß sie sich auf und niederschieben lasse, und richte dieselbe so, daß ein kenntlicher Punkt G derselben gerade eben so hoch über B als der Mittelpunkt F des Winkelmessers über A stehe. Nun richte man die unbewegliche Regel des Winkelmessers wagrecht nach der Linie FH, die bewegliche Regel hingegen nach dem Punkte G, nach dem Fuße D des Gegenstandes, und nach der Spitze C desselben, so werden dadurch die Winkel HFG, HFD und HFC bestimmt; nachdem hierdurch diese Winkel gefunden sind, so nehme man den Winkelmesser aus A hinweg und bringe ihn in B, dagegen setze man die Tafel in A und verfahre bey B eben so, wie bey A, so ergeben sich die Winkel FGI, DGI, CGI, welche die Horizontal-Linie GI bey G mit denen nach F, D, und C gezogenen Linien einschließet. Endlich so messe man die Entfernung der Puncte A und B von einander.

Um desto besser die bekannten oder gemessenen Größen zu unterscheiden, so wollen wir die Entfernung $AB = m$ setzen, die Winkel aber folgendermaßen benennen:

$HFG = a$, $HFD = b$, $HFC = c$, $FGI = d$, $DGI = e$, $CGI = f$, und so wird ferner:

$FGD = d - e$, $DFG = b + a$ und $FDG = 180^\circ - ((b + a) + (d - e.))$

Da AF sowohl, wie BG lothrecht und gleich groß sind, so wird AFGB ein gleichgestrecktes Viereck,

folglich AB = FG = m, und nun ergiebt sich in dem Dreyecke DFG folgende Vergleichung:

$$\sin. FDG : \sin. DFG = FG : GD$$

oder $\sin. (a + b + d - e) : \sin. (a + b) : = m : GD$

Eben so erhalten wir FGC = d — f, CFG = c + a, folglich FCG = 180° — ((c + a) + (d — f)), und hieraus ferner:

$$\sin. (a + c + d - f) : \sin. (a + c) = m : CG.$$

Aus vorigen beyden Verhältnißgleichungen bestimmen sich demnach die Seiten GD, CG des geradlinigten Dreyeckes CGD, davon der eingeschlossene Winkel CGD = f — e ist, und es lassen sich folglich in diesem Dreyecke die Winkel GCD, CDG und die Seite CD nach §§. 58. 59 leicht berechnen. Es sey CDG = x und DK mit GI gleichlaufend gezogen, so wird KDG = DGI = e, mithin KDC = x — e und CDE = 180° — (x — e).

Nun ist aber

$$\sin. 90° : \sin. CDE = CD : CE$$

oder:

$$\sin. 90° : \sin. (x - e) = CD : CE,$$

und hieraus findet sich demnach die gesuchte Höhe CE.

Anmerkung. In dem Fall, wo FG mit dem Horizonte gleichlaufend angenommen werden kann, verschwindet der Winkel HFG = a, indem FH mit FGI zusammenfällt. Wir können daher diesen Fall unmittelbar aus den vorigen Verhältnißgleichungen auflösen, wenn wir allenthalben a = o setzen. Denn so wird aus der ersten

$$\sin. (b + d - e) : \sin. b = m : CD$$

und aus der andern

$$\sin. (c + d - f) : \sin. c = m : CG$$

und das übrige bleibt gänzlich, wie vorhin.

Uebrigens lässet sich diese Aufgabe, ohne alle Schwierigkeit, auch auf dem Fall anwenden, wo die Höhe eines Gegenstandes bestimmt werden soll, dessen Fuß unter der Ebene, worinnen die Winkel gemessen worden, vertiefet ist. Es wird hierzu weiter nichts erfordert, als daß die Winkel b und e negativ genommen, oder das Zeichen die-

ser Winkel verändert werden muß, eben dieses muß auch in allen Fällen bey dem Winkel a beobachtet werden, sobald der vom Gegenstande weiter entfernte Standpunkt A, nicht, wie in der Figur, höher als der Standpunkt B lieget. Es haben aber auch diese Fälle nicht die mindeste Schwierigkeit, sobald man sich nur jedesmal die Sache gehörig vorstellt.

§. 77.

Aus der gegebenen Lage dreyer Gegenstände, die Lage eines Standpunktes zu finden, woselbst die Winkel gemessen worden, welche die drey Linien einschließen, so von diesem Standpunkte nach den dreyen Gegenständen gezogen werden können.

Es seyn A, B, C, Fig. 26 drey Gegenstände, deren Lage gegeben wird, nemlich es seyn AB = a, BC = b und ABC = ω gegebene Größen. Nun habe man in irgend einem angenommenen Standpunkte D die Winkel ADB, BDC gemessen, welche die von D nach A, B, C gezogene Linien DA, DB, DC bey dem gewählten Standpunkte D einschließen, und ADB = φ, BDC = λ gefunden, man soll die Lage des Punktes D gegen A, B, und C bestimmen.

Auflösung durch Zeichnung.

Nachdem die drey Punkte A, B, C, der gegebenen Lage nach, gehörig sind aufgetragen worden, so mache man bey A, an AB, einen Winkel GAB, gleich dem in D gemessenen Winkel φ, welchen die nach A und B gezogene gerade Linien DA, DB daselbst miteinander einschliessen; bey A errichte man auf AG die senkrechte Linie AE, und theile AB bey H durch die senkrechte Linie EH in zween gleiche Theile; endlich verlängere man die beyden Linien AE, HE soweit bis sie einander in E schneiden und beschreibe aus E mit der Entfernung EA = EB den Kreis ABDA.

ABDA. Eben so verfahre man bey der Linie BC, nemlich man mache bey C an BC den Winkel BCI = λ, errichte in C auf CI die Linie CF senkrecht, halbire BC bey K durch die senkrechte Linie KF, und beschreibe aus dem Punkte F, wo sich KF und CF schneiden, mit der Entfernung BF, = den Kreis BCDB, so liegt da, wo sich beyde Kreise einander schneiden, der gesuchte Punkt D.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender:

Aus der Meßkunst ist bekannt, daß der Winkel, den eine Berührungslinie mit der Sehne eines Kreises einschließet, eben so groß ist, als ein Winkel am Umkreise, welcher auf den Bogen stehet, so die Sehne vom Umkreise abschneidet. Da nun AG auf AE senkrecht stehet, so ist AG eine Berührungslinie des Kreises ABDA, davon AB eine Sehne ist. Es ist demnach GAB = ADB, mithin, da wir GAB = φ angenommen haben, so ist auch ADB = φ.

Eben so kann man beweisen, daß, weil BCI = = λ gemacht ist worden, auch BDC = λ seyn müsse, folglich hat der Punckt D die erforderliche Lage.

Auflösung durch Rechnung.

Man ziehe von E und F nach A, B, C und D die geraden Linien EA, EB, ED, FB, FC, FD, so wird AEB = 2 ADB = 2 φ und BFC = 2 BDC = 2 λ zufolge eines sehr bekannten Satzes der Meßkunst. Da nun überdem die Dreyecke AEB, BFC gleichschenklicht sind, so werden die Winkel EAB, EBA sowohl als die Winkel FBC, FCB einander völlig gleich, und man erhält EAB = EBA = $\frac{180 - 2\varphi}{2}$ = $90^\circ - \varphi$; FBC = FCB = $\frac{180^\circ - 2\lambda}{2}$ = $90^\circ - \lambda$

Nun

Nun ist in dem Dreyeck ABE

$$\sin. AEB : \sin. ABE = AB : AE,$$

oder, da $\sin. AEB = \sin. 2\varphi = \sin. (\varphi + \varphi) = 2 \sin. \varphi . \cos. \varphi$ §. 23 Nro. 1, und $\sin. ABE = \sin. (90^\circ - \varphi) = \cos. \varphi$ §. 7. gefunden werden, überdem aber $AB = a$ angenommen ist worden:

$$2 \sin. \varphi . \cos. \varphi . \cos. \varphi = a : AE,$$

demnach $AE = \frac{a. \cos. \varphi}{2 \sin. \varphi . \cos. \varphi} = \frac{\frac{1}{2} a}{\sin. \varphi} = EB = ED.$

Durch ein völlig ähnliches Verfahren ergiebt sich auch

$$BF = \frac{b. \cos. \lambda}{2 \sin. \lambda \cos. \lambda} = \frac{\frac{1}{2} b}{\sin. \lambda} = FC = FD.$$

Um den Winkel EBF des Dreyeckes BEF zu finden, haben wir, $EBF = ABC - ABE - FBC = \omega - 90^\circ + \varphi - 90^\circ + \lambda = \omega + \varphi + \lambda - 180^\circ$.

Aus den Seiten BE, BF und dem eingeschlossenen Winkel EBF des Dreyeckes BEF findet sich nun leicht nach §. 58. der Winkel BEF, der, weil er die Hälfte des Winkels BED am Mittelpunkte ist, welcher mit dem Winkel BAD am Umkreise auf dem nemlichen Kreisbogen BD stehet, dem Winkel BAD völlig gleich ist. Demnach ist BAD = BEF, und aus eben dem Grunde BCD = BFE. Sobald hierdurch der Winkel BAD gefunden ist, erhalten wir ferner $ABD = 180^\circ - BAD - \varphi$ und

$$\sin. \varphi : \sin. BAD = a : BD,$$

folglich $BD = \frac{a. \sin. BAD.}{\sin. \varphi.}$

Eben so ist

$$\sin. \varphi : \sin. ABD = a : AD,$$

und $AD = \frac{a. \sin. ABD}{\sin. \varphi} = \frac{a. \sin. (BAD + \varphi)}{\sin. \varphi.}$

End-

Endlich ergiebt sich $DBC = 180° - BCD - \lambda$

$$\sin. \lambda : \sin. DBC = b : DC,$$

mithin $DC = \frac{b. \sin. DBC}{\sin. \lambda}$.

Beyspiel.

Es sey a = 87 Fuß, b = $80\frac{1}{2}$ Fuß, $\omega = 167°. 30'$, $\varphi = 30°\ 45'$ und $\lambda = 23°. 15'$, so wird

10 + log 43,5 = , , 11. 6384893
log. sin φ = log. sin. 30°. 45' = 9. 7086699

log. AE = log. 85, 078 = 1. 9298194

Demnach AE = BE = DE = 85,078 Fuß.
Eben so ist

10 + log. 40,25 = , , 11. 6047659
log. sin. λ = log. sin. 23°. 15' = 9. 5963154

log. BF = log. 101,965 = 2. 0084504,
folglich BF = FC = FD = 101,965 Fuß.

Ferner ist EBF = 167°. 30' + 30°. 45' + 23°. 15' — 180° = 221°. 30' — 180° = 41°. 30'.

Verfahren wir daher nach §. 58, so erhalten wir im Dreyecke BEF

BF = 101,965 | 180° — EBF = 138°. 30'
BE = 85,078 | $\frac{BEF + BFE}{2}$ = 69°. 15'
BF + BE = 187,043 |
BF — BE = 16,887 |

log. tang. 69°. 15' = 10. 4215142
log. 16,887 = , , 1. 2275782

11. 6490924
log. 187,043 = , 2. 2719415

log tang. 13°. 24' = 9. 3771509

Da nun in diesem Falle BF > BE ist, so muß auch BEF > BFE seyn; es ist folglich BEF = 69°.

69°. 15′ + 13°. 24′ = 82°. 39′ und BFE = 69°. 15′ — 13°. 24′ = 55°. 51′.

Demnach BAD = 82°. 39′ und BAD + φ = 82°. 39′ + 30°. 45′ = 113°. 24′.

log. a = log. 87 = , , , 1.9395193
log. ſin. BAD = log. ſin. 82°. 39′ = 9.9964167

11.9359360
log. ſin. φ = log. ſin. 30°. 45′ = 9.7086699

log. BD = log. 168,76. = , , 2.2272661
log. a = log. 87. = , , 1.9395193
log. ſin. 113°. 24′ = , , 9.9627266

11.9022459
log. ſin. φ = log. ſin. 30°. 45′ = 9.7086699

log. AD = log. 156,16. = , , 2.1935760

Demnach haben wir BD = 168,76 Fuß und AD = 156,16 Fuß.

Ferner erhalten wir BCD = BFE = 55°. 51′ und, DBC = 180° — 55°. 51′ — 23°. 15′ = 100°. 54′. und ſomit wird

log. b = log. 80,5 = , , 1.9057959
log. ſin. DBC = log. ſin. 100°. 54′ = 9.9920932

11.8978891
log. ſin. λ = log. ſin. 23°. 15′ = 9.5963154

log. DC = log. 200,25 = , , 2.3015737
folglich DC = 200,25 Fuß.

Anmerkung. Dieſe Aufgabe iſt für die practiſche Feldmeßkunſt von großer Wichtigkeit, weil man dadurch im Stande geſetzt wird, ganze Landſchaften mit vieler Bequemlichkeit in den Grund zu legen. Uebrigens kann ſie in allen Fällen gebraucht werden, wo man die Entfernung dreyer Gegenſtände von einander kennet; um die Entfernung eines vierten Punktes zu beſtimmen. Denn in dem

Fall,

Fall, wo der Winkel ABC nicht bekannt wäre, ließe sich derselbe leicht aus den dreyen Entfernungen bestimmen, und übrigens, wie gezeiget, verfahren.

Die Aufgabe wird unmöglich,

1°. Wenn die vier Punkte A, B, C, D in gerader Linie liegen.

2°. Wenn ABC + ADC = 180°.

Indessen können diese Fälle immer durch Veränderung des Standpunktes vermieden werden, und überhaupt nur höchst selten vorkommen.

Tafel

der

Logarithmen

aller

natürlichen Zahlen

von 1 bis 10100.

Zahlen von 1 bis 100 mit ihren Log und Kennziffer.

N. 100 L. 00

N	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	0.0000000	51	1.7075702	100	0000000	150	1760913	200	3010300
2	0.3010300	52	1.7160033	101	43214	151	89769	201	31961
3	0.4771213	53	1.7242759	102	86002	152	1818436	202	53514
4	0.6020600	54	1.7323938	103	0128372	153	46914	203	74960
5	0.6989700	55	1.7403627	104	70333	154	75207	204	96302
6	0.7781513	56	1.7481880	105	0211893	155	1903317	205	3117539
7	0.8450980	57	1.7558749	106	53059	156	31246	206	38672
8	0.9030900	58	1.7634280	107	93838	157	58997	207	59703
9	0.9542425	59	1.7708520	108	0334238	158	86571	208	80633
10	1.0000000	60	1.7781513	109	74265	159	2013971	209	3201463
11	1.0413927	61	1.7853298	110	0413927	160	41200	210	22193
12	1.0791812	62	1.7923917	111	53230	161	68259	211	42825
13	1.1139434	63	1.7993405	112	92180	162	95150	212	63359
14	1.1461280	64	1.8061800	113	0530784	163	2121876	213	83796
15	1.1760913	65	1.8129134	114	69049	164	48438	214	3304138
16	1.2041200	66	1.8195439	115	0606978	165	74839	215	24385
17	1.2304489	67	1.8260748	116	44580	166	2201081	216	44538
18	1.2552725	68	1.8325089	117	81859	167	27165	217	64597
19	1.2787536	69	1.8388491	118	0718820	168	53093	218	84565
20	1.3010300	70	1.8450980	119	55470	169	78867	219	3404441
21	1.3222193	71	1.8512583	120	91812	170	2304489	220	24227
22	1.3424227	72	1.8573325	121	0827854	171	29961	221	43923
23	1.3617278	73	1.8633229	122	63598	172	55284	222	63530
24	1.3802112	74	1.8692317	123	99051	173	80461	223	83049
25	1.8979400	75	1.8750613	124	0934217	174	2405492	224	3502480
26	1.4149733	76	1.8808136	125	69100	175	80380	225	21825
27	1.4313638	77	1.8864907	126	1003705	176	55127	226	41084
28	1.4471580	78	1.8920946	127	38037	177	79733	227	60259
29	1.4623980	79	1.8976271	128	72100	178	2504200	228	79348
30	1.4771213	80	1.9030900	129	1105897	179	28530	229	98355
31	1.4913617	81	1.9084850	130	39434	180	52725	230	3617278
32	1.5051500	82	1.9138139	131	72713	181	76786	231	36120
33	1.5185139	83	1.9190781	132	1205739	182	2600714	232	54880
34	1.5314789	84	1.9242793	133	38516	183	24511	233	73559
35	1.5440680	85	1.9294189	134	71048	184	48178	234	92159
36	1.5563025	86	1.9344985	135	1303338	185	71717	235	3710679
37	1.5682017	87	1.9395193	136	35389	186	95129	236	29120
38	1.5797836	88	1.9444827	137	67206	187	2718416	237	47483
39	1.5910646	89	1.9893900	138	98791	188	41578	238	65770
40	1.6020600	90	1.9542425	139	1430148	189	64618	239	83979
41	1.6127839	91	1.9590414	140	61280	190	87536	240	3802112
42	1.6232493	92	1.9637878	141	92191	191	2810334	241	20170
43	1.6334685	93	1.9684829	142	1522883	192	33012	242	38154
44	1.6434527	94	1.9731279	143	53360	193	55573	243	56063
45	1.6532125	95	1.9777236	144	83625	194	78017	244	73898
46	1.6627578	96	1.9822712	145	1613680	195	2900346	245	91661
47	1.6720979	97	1.9867717	146	43529	196	22561	246	3909351
48	1.6812412	98	1.9912261	147	73173	197	44662	247	26970
49	1.6901961	99	1.9956352	148	1702617	198	66652	248	44517
50	1.6989700	100	2.0000000	149	31863	199	88531	249	61993
N	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
250	3979400	300	4771213	350	5440680	400	6020600	450	6532125
251	96737	301	85665	351	53071	401	31444	451	41765
252	4014005	302	4800069	352	65427	402	42261	452	51384
253	31205	303	14426	353	77747	403	53050	453	60982
254	48337	304	28736	354	90033	404	63814	454	70559
255	65402	305	42998	355	5502284	405	74550	455	80114
256	82400	306	57214	356	14500	406	85260	456	89648
257	99331	307	71384	357	26682	407	95944	457	99162
258	4116197	308	85507	358	38830	408	6106602	458	6608655
259	32998	309	99585	359	50944	409	17233	459	18127
260	49733	310	4913617	360	63025	410	27839	460	27578
261	66405	311	27604	361	75072	411	38418	461	37009
262	83013	312	41546	362	87086	412	48972	462	46420
263	99557	313	55443	363	99066	413	59501	463	55810
264	4216039	314	69296	364	6511014	414	70003	464	65180
265	32459	315	83106	365	22929	415	80481	465	74530
266	48816	316	96871	366	34811	416	90933	466	83859
267	65113	317	5010593	367	46661	417	6201361	467	93169
268	81348	318	24271	368	58478	418	11763	468	6702459
269	97523	319	37907	369	70264	419	22140	469	11728
270	4313638	320	51500	370	82017	420	32493	470	20979
271	29693	321	65050	371	93739	421	42821	471	30209
272	45689	322	78559	372	5705429	422	53125	472	39420
273	61626	323	92025	373	17088	423	63404	473	48611
274	77506	324	5105450	374	28716	424	73659	474	57783
275	93327	325	18834	375	40313	425	83889	475	66936
276	4409091	326	32176	376	51878	426	94096	476	76070
277	24798	327	45478	377	63414	427	6304279	477	85184
278	40448	328	58738	378	74918	428	14438	478	94279
279	56042	329	71959	379	86392	429	24573	479	6803355
280	71580	330	85139	380	97836	430	34685	480	12412
281	87063	331	98280	381	5809250	431	44773	481	21451
282	4502491	332	5211381	382	20634	432	54837	482	30470
283	17864	333	24442	383	31988	433	64879	483	39471
284	33183	334	37465	384	43312	434	74897	484	48454
285	48449	335	50448	385	54607	435	84893	485	57417
286	63660	336	63393	386	65873	436	94865	486	66363
287	78819	337	76299	387	77110	437	6404814	487	75290
288	93925	338	89167	388	88317	438	14741	488	84198
289	4608978	339	5301997	389	99496	439	24645	489	93089
290	23980	340	14789	390	5910646	440	34527	490	6901961
291	38930	341	27544	391	21768	441	44386	491	10815
292	53829	342	40261	392	32861	442	54223	492	19651
293	68676	343	52941	393	43926	443	64037	493	28469
294	83473	344	65584	394	54962	444	73830	494	37269
295	98220	345	78191	395	65971	445	83600	495	46052
296	4712917	346	90761	396	76952	446	93349	496	54817
297	27564	347	5403295	397	87905	447	6503075	497	63564
298	42163	348	15792	398	98831	448	12780	498	72293
299	56712	349	28254	399	6009729	449	22463	499	81005
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Lag.	N.	Log.
500	6989700	550	7403627	600	7781513	650	8129134	700	8450980
501	98377	551	11516	601	88745	651	35810	701	57180
502	7007037	552	19391	602	95965	652	42476	702	63371
503	15680	553	27251	603	7803173	653	49132	703	69553
504	24305	554	35098	604	10369	654	55777	704	75727
505	32914	555	42930	605	17554	655	62413	705	81891
506	41505	556	50748	606	24726	656	69038	706	88047
507	50080	557	58552	607	31887	657	75654	707	94194
508	58637	558	66342	608	39036	658	82259	708	8500333
509	67178	559	74118	609	46173	659	88854	709	06462
510	75702	560	81880	610	53298	660	95439	710	12583
511	84209	561	89629	611	60412	661	8202015	711	18696
512	92700	562	97363	612	67514	662	08580	712	24800
513	7101174	563	7505084	613	74605	663	15135	713	30895
514	09631	564	12791	614	81684	664	21681	714	36982
515	18072	565	20484	615	88751	665	28216	715	43060
516	26497	566	28164	616	95807	666	34742	716	49130
517	34905	567	35831	617	7902852	667	41258	717	55192
518	43298	568	43483	618	09885	668	47765	718	61244
519	51674	569	51123	619	16906	669	54261	719	67289
520	60033	570	58749	620	23917	670	60748	720	73325
521	68377	571	66361	621	30916	671	67225	721	79353
522	76705	572	73960	622	37904	672	73693	722	85372
523	85017	573	81546	623	44880	673	80151	723	91383
524	93313	574	89119	624	51846	674	86599	724	97386
525	7201593	575	96678	625	58800	675	93038	725	8603380
526	09857	576	7604225	626	65743	676	99467	726	09366
527	18106	577	11758	627	72675	677	8305887	727	15344
528	26339	578	19278	628	79596	678	12297	728	21314
529	34557	579	26786	629	86506	679	18698	729	27275
530	42759	580	34280	630	93405	680	25089	730	33229
531	50945	581	41761	631	8000294	681	31471	731	39174
532	59116	582	49230	632	07171	682	37844	732	45111
533	67272	583	56686	633	14037	683	44207	733	51040
534	75413	584	64128	634	20893	684	50561	734	56961
535	83538	585	71559	635	27737	685	56906	735	62873
536	91648	586	78976	636	34571	686	63241	736	68778
537	99743	587	86381	637	41394	687	69567	737	74675
538	7307823	588	93773	638	48207	688	75884	738	80564
539	15888	589	7701153	639	55009	689	82192	739	86444
540	23938	590	08520	640	61800	690	88491	740	92317
541	31973	591	15875	641	68580	691	94780	741	98182
542	39993	592	23217	642	75350	692	8401061	742	8704039
543	47998	593	30547	643	82110	693	07332	743	09888
544	55989	594	37864	644	88859	694	13595	744	15729
545	63965	595	45170	645	95597	695	19848	745	21563
546	71926	596	52463	646	8102325	696	26092	746	27388
547	79873	597	59743	647	09043	697	32328	747	33206
548	87806	598	67012	648	15750	698	38554	748	39016
549	95723	599	74268	649	22447	699	44772	749	44818
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
750	8750613	800	9030900	850	9294189	900	9542425	950	9777236
751	56399	801	36325	851	99296	901	47248	951	81805
752	62178	802	41744	852	9304396	902	52065	952	86369
753	67950	803	47155	853	09490	903	56878	953	90929
754	73713	804	52560	854	14579	904	61684	954	95484
755	79470	805	57959	855	19661	905	66486	955	9800034
756	85218	806	63350	856	24738	906	71282	956	04579
757	90959	807	68735	857	29808	907	76073	957	09119
758	96692	808	74114	858	34873	908	80858	958	13655
759	8802418	809	79485	859	39932	909	85639	959	18186
760	08136	810	84850	860	44985	910	90414	960	22712
761	13847	811	90209	861	50032	911	95184	961	27234
762	19550	812	95560	862	55073	912	99948	962	31751
763	25245	813	9100905	863	60108	913	9604708	963	36263
764	30934	814	06244	864	65137	914	09462	964	40770
765	36614	815	11576	865	70161	915	14211	965	45273
766	42288	816	16902	866	75179	916	18955	966	49771
767	47954	817	22221	867	80191	917	23693	967	54265
768	53612	818	27533	868	85197	918	28427	968	58754
769	59263	819	32839	869	90198	919	33155	969	63238
770	64907	820	38139	870	95193	920	37878	970	67717
771	70544	821	43432	871	9400182	921	42596	971	72192
772	76173	822	48718	872	05165	922	47309	972	76663
773	81795	823	53998	873	10142	923	52017	973	81128
774	87410	824	59272	874	15114	924	56720	974	85590
775	93017	825	64539	875	20081	925	61417	975	90046
776	98617	826	69800	876	25041	926	66110	976	94498
777	8904210	827	75055	877	29996	927	70797	977	98946
778	09796	828	80303	878	34945	928	75480	978	9903389
779	15375	829	85545	879	39889	929	80157	979	07827
780	20946	830	90781	880	44827	930	84829	980	12261
781	26510	831	96010	881	49759	931	89497	981	16690
782	32068	832	9201233	882	54686	932	94159	982	21115
783	37618	833	06450	883	59607	933	98816	983	25535
784	43161	834	11661	884	64523	934	9703469	984	29951
785	48697	835	16865	885	69433	935	08116	985	34362
786	54225	836	22063	886	74337	936	12758	986	38769
787	59747	837	27255	887	79236	937	17396	987	43172
788	65262	838	32440	888	84130	938	22028	988	47569
789	70770	839	37620	889	89018	939	26656	989	51963
790	76271	840	42793	890	93900	940	31279	990	56352
791	81765	841	47960	891	98777	941	35896	991	60737
792	87252	842	53121	892	9503649	942	40509	992	65117
793	92732	843	58276	893	08515	943	45117	993	69492
794	98205	844	63424	894	13375	944	49720	994	73864
795	9003671	845	68567	895	18230	945	54318	995	78231
796	09131	846	73704	896	23080	946	58911	996	82593
797	14583	847	78834	897	27924	947	63500	997	86952
798	20029	848	83959	898	32763	948	68083	998	91305
799	25468	849	89077	899	37597	949	72662	999	95655
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000000	04341	08677	13009	17337	21661	25980	30295	34605	38912
1	43214	47512	51805	56094	60380	64660	68937	73210	77478	81742
2	86002	90257	94509	98756	03000	07239	11474	15704	19931	24154
3	0128372	32587	36797	41003	45205	49403	53598	57788	61974	66155
4	70333	74507	78677	82843	87005	91163	95317	99467	03613	07755
5	0211893	16027	20157	24284	28406	32525	36639	40750	44857	48960
6	53059	57154	61245	65333	69416	73496	77572	81644	85713	89777
7	93838	97895	01948	05997	10043	14085	18123	22157	26188	30214
8	0334238	38257	42273	46285	50293	54297	58298	62295	66289	70279
9	74265	78248	82226	86202	90173	94141	98106	02066	06023	09977
110	0413927	17873	21816	25755	29691	33623	37551	41476	45398	49315
11	53230	57141	61048	64952	68852	72749	76642	80532	84418	88301
12	92180	96056	99929	03798	07663	11525	15384	19239	23091	26939
13	0530784	34626	38464	42299	46131	49959	53783	57605	61423	65237
14	69049	72856	76661	80462	84260	88055	91846	95634	99419	03200
15	0606978	10753	14525	18293	22058	25820	29578	33334	37086	40834
16	44580	48322	52061	55797	59530	63259	66986	70709	74428	78145
17	81859	85569	89276	92980	96681	00379	04073	07765	11453	15138
18	0718820	22499	26175	29847	33517	37184	40847	44507	48164	51819
19	55470	59118	62763	66404	70043	73679	77312	80942	84568	88192
120	91812	95430	99045	02656	06265	09870	13473	17073	20669	24263
21	0827854	31441	35026	38608	42187	45763	49336	52906	56473	60037
22	63598	67157	70712	74265	77814	81361	84905	88446	91984	95519
23	99051	02581	06107	09631	13152	16670	20185	23697	27206	30713
24	0934217	37718	41216	44711	48204	51694	55180	58665	62146	65624
25	69100	72573	76043	79511	82975	86437	89896	93353	96806	00257
26	1003705	07151	10594	14034	17471	20905	24337	27766	31193	34616
27	38037	41456	44871	48284	51694	55102	58507	61909	65309	68705
28	72100	75491	78880	82267	85650	89031	92410	95785	99159	02529
29	1105897	09262	12625	15985	19343	22698	26050	29400	32747	36092
130	39434	42773	46110	49444	52776	56105	59432	62756	66077	69396
31	72713	76027	79338	82847	85954	89258	92559	95858	99154	02448
32	1205739	09028	12315	15598	18880	22159	25435	28709	31981	35250
33	38516	41781	45042	48301	51558	54813	58065	61314	64561	67806
34	71048	74288	77525	80760	83993	87223	90451	93676	96899	00119
35	1303338	06553	09767	12978	16187	19393	22597	25798	28998	32195
36	35389	38581	41771	44959	48144	51327	54507	57685	60861	64034
37	67206	70375	73541	76705	79867	83027	86184	89339	92492	95643
38	98791	01937	05080	08222	11361	14498	17632	20765	23895	27022
39	1430148	33271	36392	39511	42628	45742	48854	51964	55072	58177
140	61280	64381	67480	70577	73671	76763	79853	82941	86027	89110
41	92191	95270	98347	01422	04494	07564	10633	13699	16762	19824
42	1522883	25941	28996	32049	35100	38149	41195	44240	47282	50322
43	53360	56396	59430	62462	65492	68519	71544	74568	77589	80608
44	83625	86640	89653	92663	95672	98678	01683	04685	07686	10684
45	1613680	16674	19666	22656	25644	28630	31614	34596	37575	40553
46	43529	46502	49474	52443	55411	58376	61340	64301	67261	70218
47	73173	76127	79078	82027	84975	87920	90864	93805	96744	99682
48	1702617	05551	08482	11412	14339	17265	20188	23110	26029	28947
49	31863	34776	37688	40598	43506	46412	49316	52218	55118	58016
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	1760913	63807	66699	69590	72478	75365	78250	81133	84013	86892
51	89769	92645	95518	98389	01259	04126	06992	09856	12718	15578
52	1818436	21292	24147	26999	29850	32698	35545	38390	41234	44075
53	46914	49752	52588	55422	58254	61084	63912	66739	69563	72386
54	75207	78026	80844	83659	86473	89285	92095	94903	97710	00514
55	1903317	06118	08917	11715	14510	17304	20096	22886	25675	28461
56	31246	34029	36810	39590	42367	45143	47918	50690	53461	56229
57	58997	61762	64525	67287	70047	72806	75562	78317	81070	83821
58	86571	89319	92065	94809	97552	00293	03032	05769	08505	11239
59	2013971	76702	19431	22158	24883	27607	30329	33049	35768	38485
160	41200	43913	46625	49335	52044	54750	57455	60159	62860	65560
61	68259	70955	73650	76344	79035	81725	84414	87100	89785	92468
62	95150	97830	00508	03185	05860	08534	11205	13876	16544	19211
63	2121876	24540	27202	29862	32521	35178	37833	40487	43139	45790
64	48458	51086	53732	56376	59018	61659	64298	66936	69572	72207
65	74839	77471	80100	82729	85355	87980	90603	93225	95845	98464
66	2201081	03696	06310	08922	11533	14142	16750	19356	21960	24563
67	27165	29764	32363	34959	37555	40148	42740	45331	47920	50507
68	53093	55677	58260	60841	63421	65999	68576	71151	73724	76296
69	78867	81436	84004	86570	89134	91697	94258	96818	99377	01934
170	2304489	07043	09596	12146	14696	17244	19790	22335	24879	27421
71	29961	32500	35038	37574	40108	42641	45173	47703	50232	52759
72	55284	57809	60331	62853	65373	67891	70408	72923	75437	77950
73	80461	82971	85479	87986	90491	92995	95497	97998	00498	02996
74	2405492	07988	10482	12974	15465	17954	20442	22929	25414	27898
75	30380	32861	35341	37819	40296	42771	45245	47718	50189	52658
76	55127	57594	60059	62523	64986	67447	69907	72365	74823	77278
77	79733	82186	84637	87087	89536	91984	94430	96874	99318	01759
78	2504200	06639	09077	11513	13949	16382	18815	21246	23675	26103
79	28530	30956	33380	35803	38224	40645	43063	45481	47897	50312
180	52725	55137	57548	59957	62365	64772	67177	69582	71984	74386
81	76786	79185	81582	83978	86373	88766	91158	93549	95939	98327
82	2600714	03099	05484	07867	10248	12629	15008	17385	19762	22137
83	24511	26883	29255	31625	33993	36361	38727	41092	43455	45817
84	48178	50538	52896	55253	57609	59964	62317	64669	67020	69369
85	71717	74064	76410	78754	81097	83439	85780	88119	90457	92794
86	95129	97464	99797	02129	04459	06788	09116	11443	13769	16093
87	2718416	20738	23058	25378	27696	30013	32328	34643	36956	39268
88	41578	43888	46196	48503	50809	53114	55417	57719	60020	62320
89	64618	66915	69211	71506	73800	76092	78383	80673	82962	85250
190	87536	89821	92105	94388	96669	98950	01229	03507	05784	08059
91	2810334	12607	14879	17150	19419	21688	23955	26221	28486	30750
92	33012	35274	37534	39793	42051	44307	46563	48817	51070	53322
93	55573	57823	60071	62319	64565	66810	69054	71296	73538	75778
94	78017	80255	82492	84728	86963	89196	91428	93660	95890	98118
95	2900346	02573	04798	07022	09246	11468	13689	15908	18127	20344
96	22561	24776	26990	29203	31415	33626	35835	38044	40251	42457
97	44662	46866	49069	51271	53471	55671	57869	60067	62263	64458
98	66652	68845	71037	73227	75417	77605	79792	81979	84164	86348
99	88531	90713	92893	95073	97252	99429	01605	03781	05955	08128
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	3010300	12471	14641	16809	18977	21144	23309	25474	27637	29799
1	31961	34121	36280	38438	40595	42751	44905	47059	49212	51363
2	53514	55663	57812	59959	62105	64250	66394	68537	70680	72820
3	74960	77099	79237	81374	83509	85644	87778	89910	92042	94172
4	96302	98430	00557	02684	04809	06933	09056	11178	13300	15420
5	3117539	19657	21774	23889	26004	28118	30231	32343	34454	36563
6	38672	40780	42887	44992	47097	49201	51303	53405	55505	57605
7	59703	61801	63898	65993	68088	70181	72273	74365	76455	78545
8	80633	82721	84807	86893	88977	91061	93143	95224	97305	99384
9	3201463	03540	05617	07692	09767	11840	13913	15984	18055	20124
210	22193	24261	26327	28393	30457	32521	34584	36645	38706	40766
11	42825	44882	46939	48995	51050	53104	55157	57209	59260	61310
12	63359	65407	67454	69500	71545	73589	75633	77675	79716	81757
13	83796	85834	87872	89909	91944	93979	96012	98045	00077	02108
14	3304138	06167	08195	10222	12248	14273	16297	18320	20343	22364
15	24385	26404	28423	30440	32457	34473	36488	38501	40514	42526
16	44538	46548	48557	50565	52573	54579	56585	58589	60593	62596
17	64597	66598	68598	70597	72595	74593	76589	78584	80579	82572
18	84565	86557	88547	90537	92526	94514	96502	98488	00473	02458
19	3404441	06424	08405	10386	12366	14345	16323	18301	20277	22252
220	24227	26200	28173	30145	32116	34086	36055	38023	39991	41957
21	43923	45887	47851	49814	51776	53737	55698	57657	59615	61573
22	63530	65486	67441	69395	71348	73300	75252	77202	79152	81101
23	83049	84996	86942	88887	90832	92775	94718	96660	98601	00541
24	3502480	04419	06356	08293	10229	12163	14098	16031	17963	19895
25	21825	23755	25684	27612	29539	31465	33391	35316	37239	39162
26	41084	43006	44926	46846	48764	50682	52599	54515	56431	58345
27	60259	62171	64083	65994	67905	69814	71723	73630	75537	77443
28	79348	81253	83156	85059	86961	88862	90762	92662	94560	96458
29	98355	00251	02146	04041	05934	07827	09719	11610	13500	15390
230	3617278	19166	21053	22939	24825	26709	28593	30476	32358	34239
31	36120	37999	39878	41756	43633	45510	47386	49260	51134	53007
32	54880	56751	58622	60492	62361	64230	66097	67964	69830	71695
33	73559	75423	77285	79147	81008	82869	84728	86587	88445	90302
34	92159	94014	95869	97723	99576	01428	03280	05131	06981	08830
35	3710679	12526	14373	16219	18065	19909	21753	23596	25438	27279
36	29120	30960	32799	34637	36475	38311	40147	41983	43817	45651
37	47483	49316	51147	52977	54807	56636	58464	60292	62118	63944
38	65770	67594	69418	71240	73062	74884	76704	78524	80343	82161
39	83979	85796	87612	89427	91241	93055	94868	96680	98492	00302
240	3802112	03922	05730	07538	09345	11151	12956	14761	16567	18368
41	20170	21972	23773	25573	27373	29171	30969	92766	34563	36359
42	38154	39948	41741	43534	45326	47117	48908	50698	52487	54275
43	56063	57850	59636	61421	63206	64990	66773	68555	70337	72118
44	73898	75678	77457	79235	81012	82789	84565	86340	88114	89888
45	91661	93433	95205	96975	98746	00515	02284	04052	05819	07585
46	3909351	11116	12880	14644	16407	18169	19931	21691	23452	25211
47	26970	28727	30485	32241	33997	35752	37506	39260	41013	42765
48	44517	46268	48018	49767	51516	53264	55011	56758	58504	60249
49	61993	63737	65480	67223	68964	70705	72446	74185	75924	77663
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	3979400	81137	82873	84608	86343	88077	89811	91543	93275	95007
51	96737	98467	00196	01925	03653	05380	07106	08832	10557	12282
52	4014005	15728	17451	19173	20893	22614	24333	26052	27771	29488
53	31205	32921	34637	36352	38066	39780	41492	43205	44916	46627
54	48337	50047	51755	53464	55171	56878	58584	60289	61994	63698
55	65402	67105	68807	70508	72209	73909	75608	77307	79005	80703
56	82400	84096	85791	87486	89180	90874	92567	94259	95950	97641
57	99331	01021	02710	04398	06085	07772	09459	11144	12829	14513
58	4116197	17880	19562	21244	22925	24605	26285	27964	29643	31320
59	32998	34674	36350	38025	39700	41374	43047	44719	46391	48063
260	49733	51404	53073	54742	56410	58077	59744	61410	63076	64741
61	66405	68069	69732	71394	73056	74717	76377	78037	79696	81355
62	83013	84670	86327	87983	89638	91293	92947	94601	96254	97906
63	99557	01208	02859	04509	06158	07806	09454	11101	12748	14394
64	4216039	17684	19328	20972	22614	24257	25898	27539	29180	30820
65	32459	34097	35735	37372	39009	40645	42281	43916	45550	47183
66	48816	50449	52081	53712	55342	56972	58601	60230	61858	63486
67	65113	66739	68365	69990	71614	73238	74861	76484	78106	79727
68	81348	82968	84588	86207	87825	89443	91060	92677	94293	95908
69	97523	99137	00751	02363	03976	05588	07199	08809	10419	12029
270	4313638	15246	16853	18460	20067	21673	23278	24883	26487	28090
71	29693	31295	32897	34498	36098	37698	39298	40896	42495	44092
72	45689	47285	48881	50476	52071	53665	55249	56851	58444	60035
73	61626	63217	64807	66396	67985	69573	71161	72748	74334	75920
74	77506	79090	80675	82258	83841	85423	87005	88587	90167	91747
75	93327	94906	96484	98062	99639	01216	02792	04368	05943	07517
76	4409091	10664	12237	13809	15380	16951	18522	20092	21661	23230
77	24798	26365	27932	29499	31065	32630	34195	35759	37322	38885
78	40448	42010	43571	45132	46692	48252	49811	51370	52928	54485
79	56042	57598	59154	60709	62264	63818	65372	66925	68477	70029
280	71580	73131	74681	76231	77780	79329	80877	82424	83971	85517
81	87063	88608	90153	91697	93241	94784	96327	97868	99410	00951
82	4502491	04031	05570	07109	08647	10185	11722	13258	14794	16329
83	17864	19399	20932	22466	23998	25531	27062	28592	30124	31654
84	33183	34712	36241	37769	39296	40823	42349	43875	45400	46924
85	48449	49972	51495	53018	54540	56061	57582	59102	60622	62142
86	63660	65179	66696	68213	69730	71246	72762	74277	75791	77305
87	78819	80332	81844	83356	84868	86378	87889	89399	90908	92417
88	93925	95433	96940	98446	99953	01458	02963	04468	05972	07475
89	4608978	10481	11983	13484	14985	16486	17986	19485	20984	22482
290	23980	25477	26974	28470	29966	31461	32956	34450	35944	37437
91	38930	40422	41914	43405	44895	46386	47875	49364	50853	52341
92	53829	55316	56812	58288	59774	61259	62743	64227	65711	67194
93	68676	70158	71640	73121	74601	76081	77561	79039	80518	81996
94	83473	84950	86427	87903	89378	90853	92327	93801	95275	96748
95	98220	99692	01164	02634	04105	05575	07044	08513	09982	11450
96	4712917	14384	15851	17317	18782	20247	21711	23175	24639	26102
97	27564	29027	30488	31949	33410	34870	36329	37788	39247	40705
98	42163	43620	45076	46533	47988	49443	50898	52352	53806	55259
99	56712	58164	59616	61067	62518	63968	65418	66867	68316	69765
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	4771213	72660	74108	75553	76999	78445	79890	81334	82778	84222
1	85665	87108	88550	89991	91432	92873	94313	95753	97192	98631
2	4800069	01507	02945	04381	05818	07254	08689	10124	11559	12993
3	14426	15859	17292	18724	20156	21587	23018	24448	25878	27307
4	28736	30164	31592	33020	34446	35873	37299	38725	40150	41574
5	42998	44422	45845	47268	48690	50112	51533	52954	54375	55795
6	57214	58633	60052	61470	62888	64305	65722	67138	68554	69969
7	71384	72798	74212	75626	77039	78451	79863	81275	82686	84097
8	85507	86917	88326	89735	91144	92552	93959	95366	96773	98179
9	99585	00990	02395	03799	05203	06607	08010	09412	10814	12216
310	4913617	15018	16418	17818	19217	20616	22015	23413	24810	26207
11	27604	29000	30396	31791	33186	34581	35974	37368	38761	40154
12	41546	42938	44329	45720	47110	48500	49890	51279	52667	54056
13	55443	56831	58218	59604	60990	62375	63761	65145	66529	67913
14	69296	70679	72062	73444	74825	76206	77587	78967	80347	81727
15	83106	84484	85862	87240	88617	89994	91370	92746	94121	95496
16	96871	98245	99619	00992	02365	03737	05109	06481	07852	09222
17	5010593	11962	13332	14701	16069	17437	18805	20172	21539	22905
18	24271	25637	27002	28366	29731	31094	32458	33821	35183	36545
19	37907	39268	40629	41989	43349	44709	46068	47426	48785	50142
320	51500	52857	54213	55569	56925	58280	59635	60990	62344	63697
21	65050	66403	67755	69107	70459	71810	73160	74511	75860	77210
22	78559	79907	81255	82603	83950	85297	86644	87990	89335	90680
23	92025	93370	94714	96057	97400	98743	00085	01427	02768	04109
24	5105450	06790	08130	09469	10808	12147	13485	14823	16160	17497
25	18834	20170	21505	22841	24175	25510	26844	28178	29511	30844
26	32176	33508	34840	36171	37502	38832	40162	41491	42820	44149
27	45478	46805	48133	49460	50787	52113	53439	54764	56089	57414
28	58738	60062	61386	62709	64031	65354	66676	67997	69318	70639
29	71959	73279	74598	75917	77236	78554	79872	81189	82507	83823
330	85139	86455	87771	89086	90400	91715	93028	94342	95655	96968
31	98280	99592	00903	02214	03525	04835	06145	07455	08764	10073
32	5211381	12689	13996	15303	16610	17916	19222	20528	21833	23138
33	24442	25746	27050	28353	29656	30958	32260	33562	34863	36164
34	37465	38765	40064	41364	42663	43961	45259	46557	47854	49151
35	50448	51744	53040	54336	55631	56925	58220	59513	60807	62100
36	63393	64685	65977	67269	68560	69851	71141	72431	73721	75010
37	76299	77588	78876	80163	81451	82738	84024	85311	86596	87882
38	89167	90452	91736	93020	94304	95587	96870	98152	99434	00716
39	5301997	03278	04558	05839	07118	08398	09677	10955	12234	13512
340	14789	16066	17343	18619	19896	21171	22446	23721	24996	26270
41	27544	28817	30090	31363	32635	33907	35179	36450	37721	38991
42	40261	41531	42800	44069	45338	46606	47874	49141	50408	51675
43	52941	54207	55473	56738	58003	59267	60532	61795	63059	64322
44	65584	66847	68109	69370	70631	71892	73153	74413	75673	76932
45	78191	79450	80708	81966	83223	84481	85737	86994	88250	89506
46	90761	92016	93271	94525	95779	97032	98286	99538	00791	02043
47	5403295	04546	05797	07048	08298	09548	10798	12047	13296	14544
48	15792	17040	18288	19535	20781	22028	23274	24519	25765	27010
49	28254	29498	30742	31986	33229	34472	35714	36956	38198	39439
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	5440680	41921	43161	44401	45641	46880	48119	49358	40596	51834
51	53071	54308	55545	56781	58018	59253	60489	61724	62958	64193
52	65427	66660	67894	69126	70359	71591	72823	74055	75286	76517
53	77747	78977	80207	81436	82665	83894	85123	86351	87578	88806
54	90033	91259	92486	93712	94937	96162	97387	98612	99836	01060
55	5502284	03507	04730	05952	07174	08396	09618	10839	12059	13280
56	14500	15720	16939	18158	19377	20595	21813	23031	24248	25465
57	26682	27899	29115	30330	31545	32760	33975	35189	36403	37617
58	38830	40043	41256	42468	43680	44892	46103	47314	48524	49735
59	50944	52154	53363	54572	55781	56989	58197	59404	60612	61818
360	63025	64231	65437	66643	67848	69053	70257	71461	72665	73869
61	75072	76275	77477	78680	79881	81083	82284	83485	84686	85886
62	87086	88285	89484	90683	91882	93080	94278	95476	96673	97870
63	99066	00262	01458	02654	03849	05044	06239	07433	08627	09821
64	5611014	12207	13399	14592	15784	16975	18167	19358	20548	21739
65	22929	24118	25308	26497	27685	28874	30062	31250	32437	33624
66	34811	35997	37183	38369	39555	40740	41925	43109	44293	45477
67	46661	47844	49027	50209	51392	52573	53755	54936	56117	57298
68	58478	59658	60838	62017	63196	64375	65553	66731	67909	69087
69	70264	71440	72617	73793	74969	76144	77320	78495	79669	80843
370	82017	83191	84364	85537	86710	87882	89054	90226	91397	92568
71	93739	94910	96080	97249	98419	99588	00757	01926	03094	04262
72	5705429	06597	07764	08930	10097	11263	12429	13594	14759	15924
73	17088	18252	19416	20580	21743	22906	24069	25231	26393	27555
74	28716	29877	31038	32198	33358	34518	35678	36837	37996	39154
75	40313	41471	42628	43786	44943	46099	47256	48412	49568	50723
76	51878	53033	54188	55342	56496	57650	58803	59956	61109	62261
77	63414	64565	65717	66868	68019	69170	70320	71470	72620	73769
78	74918	76067	77215	78363	79511	80659	81806	82953	84100	85246
79	86392	87538	88683	89828	90973	92118	93262	94406	95550	96693
380	97836	98979	00121	01263	02405	03547	04688	05829	06969	08110
81	5809250	10389	11529	12668	13807	14945	16084	17222	18359	19497
82	20634	21770	22907	24043	25179	26314	27450	28585	29719	30854
83	31988	33122	34255	35388	36521	37654	38786	39918	41050	42181
84	43312	44443	45574	46704	47834	48963	50093	51222	52351	53479
85	54607	55735	56863	57990	59117	60244	61370	62496	63622	64748
86	65873	66998	68123	69247	70371	71495	72618	73742	74865	75987
87	77110	78232	79353	80475	81596	82717	83838	84958	86078	87198
88	88317	89436	90555	91674	92792	93910	95028	96145	97263	98379
89	99496	00612	01728	02844	03959	05075	06189	07304	08418	09532
390	5910646	11760	12873	13986	15098	16210	17322	18434	19546	20657
91	21768	22878	23988	25098	26208	27318	28427	29536	30644	31753
92	32861	33968	35076	36183	37290	38397	39503	40609	41715	42820
93	43926	45030	46135	47239	48344	49447	50551	51654	52757	53860
94	54962	56064	57166	58268	59369	60470	61571	62671	63771	64871
95	65971	67070	68169	69268	70367	71465	72563	73661	74758	75855
96	76952	78048	79145	80241	81336	82432	83527	84622	85717	86811
97	87905	88999	90092	91186	92279	93371	94464	95556	96648	97739
98	98831	99922	01013	02103	03193	04283	05373	06462	07551	08640
99	09729	10817	11905	12993	14081	15168	16255	17341	18428	19514
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	6020600	21686	22771	23856	24941	26025	27109	28193	29277	30361
1	31444	32527	33609	34692	35774	36855	37937	39018	40099	41180
2	42261	43341	44421	45500	46580	47659	48738	49816	50895	51973
3	53050	54128	55205	56282	57359	58435	59512	60587	61663	62739
4	63814	64889	65963	67037	68111	69185	70259	71332	72405	73478
5	74550	75622	76694	77766	78837	79909	80979	82050	83120	84191
6	85260	86330	87399	88468	89537	90605	91674	92742	93809	94877
7	95944	97011	98078	99144	00210	01276	02342	03407	04472	05537
8	6106602	07666	08730	09794	10857	11921	12984	14046	15109	16171
9	17233	18295	19356	20417	21478	22539	23599	24660	25720	26779
410	27839	28898	29957	31015	32074	33132	34189	35247	36304	37361
11	38418	39475	40531	41587	42643	43698	44754	45809	46863	47918
12	48972	50026	51080	52133	53187	54240	55292	56345	57397	58449
13	59501	60552	61603	62654	63705	64755	65805	66855	67905	68954
14	70003	71052	72101	73149	74197	75245	76293	77340	78387	79434
15	80481	81527	82573	83619	84665	85710	86755	87800	88845	89889
16	90933	91977	93021	94064	95107	96150	97193	98235	99277	00319
17	6201361	02402	03443	04484	05524	06565	07605	08645	09684	10724
18	11763	12802	13840	14879	15917	16955	17992	19030	20067	21104
19	22140	23177	24213	25249	26284	27320	28355	29390	30424	31459
420	32493	33527	34560	35594	36627	37660	38693	39725	40757	41789
21	42822	43851	44884	45915	46945	47976	49006	50036	51066	52095
22	53125	54154	55182	56211	57239	58267	59295	60322	61350	62377
23	63404	64430	65457	66483	67509	68534	69560	70585	71610	72634
24	73659	74683	75707	76730	77754	78777	79800	80823	81845	82867
25	83889	84911	85933	86954	87975	88996	90016	91037	92057	93076
26	94096	95115	96134	97153	98172	99190	00209	01226	02244	03262
27	6304279	05296	06312	07329	08345	09361	10377	11393	12408	13423
28	14438	15452	16467	17481	18495	19508	20522	21535	22548	23560
29	24573	25585	26597	27609	28620	29632	30643	31654	32664	33674
430	34685	35694	36704	37713	38723	39732	40740	41749	42757	43765
31	44773	45780	46788	47795	48801	49808	50814	51820	52826	53832
32	54837	55843	56848	57852	58857	59861	60865	61869	62873	63876
33	64879	65882	66884	67887	68889	69891	70893	71894	72895	73897
34	74897	75898	76898	77898	78898	79898	80897	81896	82895	83894
35	84893	85891	86889	87887	88884	89882	90879	91876	92872	93869
36	94865	95861	66857	97852	98847	99842	00837	01832	02826	03820
37	6404814	05808	06802	07795	08788	09781	10773	11765	12758	13749
38	14741	15733	16724	17715	18705	19696	20686	21676	22666	23656
39	24645	25634	26623	27612	28601	29589	30577	31565	32552	33540
440	34527	35514	36500	37487	38473	39459	40445	41431	42416	43401
41	44386	45371	46355	47339	48323	49307	50291	51274	52257	53240
42	54223	55205	56187	57169	58151	59133	60114	61095	62076	63057
43	64037	65018	65997	66977	67957	68936	69915	70894	71873	72851
44	73830	74808	75786	76763	77741	78718	79695	80671	81648	82624
45	83600	54576	85552	86527	87502	88477	89452	90426	91401	92375
46	93349	94322	95296	96269	97242	98215	99187	00160	01132	02104
47	6503075	04047	05018	05989	06960	07930	08901	09871	10841	11811
48	12780	13749	14719	15687	16656	17624	18593	19561	20528	21496
49	22463	23431	24397	25364	26331	27297	28263	29229	30195	31160
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	6532125	33090	34055	35019	35984	36948	37912	38876	3983	40802
51	41765	42728	43691	44653	45616	46578	47539	48501	4946	50423
52	51384	52345	53306	54266	55226	56186	57145	58105	5906	60023
53	60982	61941	62899	63857	64815	65773	66730	67688	6864	69602
54	70559	71515	72471	73427	74383	75339	76294	77250	78205	79159
55	80114	81068	82023	82977	83930	84884	85837	86790	87743	88696
56	89648	90601	91553	92505	93456	94408	95359	96310	97261	98212
57	99162	00112	01062	02012	02962	03911	04860	05809	06758	07706
58	6608655	09603	10551	11499	12446	13393	14341	15287	16234	17181
59	18127	19073	20019	20964	21910	22855	23800	24745	25690	26634
460	27578	28522	29466	30410	31353	32296	33239	34182	35125	36067
61	37009	37951	38893	39835	40776	41717	42658	43599	44539	45480
62	46420	47360	48299	49239	50178	51117	52056	52995	53934	54872
63	55810	56748	57686	58623	59560	60497	61434	62371	63307	64244
64	65180	66116	67051	67987	68922	69857	70792	71727	72661	73595
65	74530	75463	76397	77331	78264	79197	80130	81062	81995	82927
66	83859	84791	85723	86654	87585	88516	89447	90378	91308	92239
67	93169	94099	95028	95958	96887	97816	98745	99674	00602	01530
68	6702459	03386	04314	05242	06169	07096	08023	08950	09876	10802
69	11728	12654	13580	14506	15431	16356	17281	18206	19130	20054
470	20979	21903	22826	23750	24673	25596	26519	27442	28365	29287
71	30209	31131	32053	32974	33896	34817	35738	36659	37579	38500
72	39420	40340	41260	42179	43099	44018	44937	45856	46775	47693
73	48611	49529	50447	51365	52283	53200	54117	55034	55951	56867
74	57783	58700	59615	60531	61447	62362	63277	64192	65107	66022
75	66936	67850	68764	69678	70592	71505	72418	73332	74244	75157
76	76070	76982	77894	78806	79718	80629	81540	82452	83362	84273
77	85184	86094	87004	87914	88824	89734	90643	91552	92461	93370
78	94279	95187	96096	97004	97912	98819	99727	00634	01541	02448
79	6803355	04262	05168	06074	06980	07886	08792	09697	10602	11507
480	12412	13317	14222	15126	16030	16934	17838	18741	19645	20548
81	21451	22354	23256	24159	25061	25963	26865	27766	28668	29569
82	30470	31371	32272	33173	34073	34973	35873	36773	37673	38572
83	39471	40370	41269	42168	43066	43965	44863	45761	46659	47556
84	48454	49351	50248	51145	52041	52938	53834	54730	55626	56522
85	57417	58313	59208	60103	60998	61892	62787	63681	64575	65469
86	66363	67256	68150	69043	69936	70828	71721	72613	73506	74398
87	75290	76181	77073	77964	78855	79746	80637	81528	82418	83308
88	84198	85088	85978	86867	87757	88646	89535	90423	91312	92200
89	93089	93977	94864	95752	96640	97527	98414	99301	00188	01074
490	6901961	02847	03733	04619	05505	06390	07275	08161	09046	09930
91	10815	11699	12584	13468	14352	15235	16119	17002	17885	18768
92	19651	20534	21416	22298	23180	24062	24944	25826	26707	27588
93	28469	29350	30231	31111	31991	32872	33751	34631	35511	36390
94	37269	38149	39027	39906	40785	41663	42541	43419	44297	45175
95	46052	46929	47806	48683	49560	50437	51313	52189	53065	53941
96	54817	55692	56568	57443	58318	59193	60067	60942	61816	62690
97	63564	64438	65311	66185	67058	67931	68804	69676	70549	71421
98	72293	73165	74037	74909	75780	76652	77523	78394	79264	80135
99	81005	81876	82746	83616	84485	85355	86224	87093	87963	88831
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	6989700	90569	91437	92305	93173	94041	94908	95776	96643	97510
01	98377	99244	00111	00977	01843	02709	03575	04441	05307	06172
02	7007037	07902	08767	09632	10496	11361	12225	13089	13953	14816
03	15680	16543	17406	18269	19132	19995	20857	21720	22582	23444
04	24305	25167	26028	26890	27751	28612	29472	30333	31193	32054
05	32914	33774	34633	35493	36352	37212	38071	38930	39788	40647
06	41505	42363	43221	44079	44937	45794	46652	47509	48366	49223
07	50080	50936	51792	52649	53505	54360	55216	56072	56927	57782
08	58637	59492	60347	61201	62055	62910	63764	64617	65471	66325
09	67178	68031	68884	69737	70589	71442	72294	73146	73998	74850
510	75702	76553	77405	78256	79107	79957	80808	81659	82509	83359
11	84209	85059	85908	86758	87607	88456	89305	90154	91003	91851
12	92700	93548	94396	95244	96091	96939	97786	98633	99480	00327
13	7101174	02020	02866	03713	04559	05404	06250	07096	07941	08786
14	09631	10476	11321	12165	13010	13854	14698	15542	16385	17229
15	18072	18915	19759	20601	21444	22287	23129	23971	24813	25655
16	26497	27339	28180	29021	29862	30703	31544	32385	33225	34065
17	34905	35745	36585	37425	38264	39104	39943	40762	41620	42459
18	43298	44136	44974	45812	46650	47488	48325	49162	50000	50837
19	51674	52510	53347	54183	55019	55856	56691	57527	58363	59198
520	60033	60869	61703	62538	63373	64207	65042	65876	66710	67544
21	68377	69211	70044	70877	71710	72543	73376	74208	75041	75873
22	76705	77537	78369	79200	80032	80863	81694	82525	83356	84186
23	85017	85847	86677	87507	88337	89167	89996	90826	91655	92484
24	93313	94142	94970	95799	96627	97455	98283	99111	99938	00766
25	7201593	02420	03247	04074	04901	05727	06554	07380	08206	09032
26	09857	10683	11508	12334	13159	13984	14809	15633	16458	17282
27	18106	18930	19754	20578	21401	22225	23048	23871	24694	25517
28	26339	27162	27984	28806	29628	30450	31272	32093	32914	33736
29	34557	35378	36198	37019	37839	38660	39480	40300	41120	41939
530	42759	43578	44397	45216	46035	46854	47672	48491	49309	50127
31	50945	51763	52581	53398	54216	55033	55850	56667	57483	58300
32	59116	59933	60749	61565	62380	63196	64012	64827	65642	66457
33	67272	68087	68901	69716	70530	71344	72158	72972	73786	74599
34	75413	76226	77039	77852	78664	79477	80290	81102	81914	82726
35	83538	84350	85161	85972	86784	87595	88406	89216	90027	90838
36	91648	92458	93268	94078	94888	95697	96507	97316	98125	98934
37	99743	00552	01360	02168	02977	03785	04593	05400	06208	07015
38	7307823	08630	09437	10244	11051	11857	12663	13470	14276	15082
39	15888	16693	17499	18304	19109	19914	20719	21524	22329	23133
540	23938	24742	25546	26350	27153	27957	28760	29564	30367	31170
41	31973	32775	33578	34380	35183	35985	36787	37588	38390	39192
42	39993	40794	41595	42396	43197	43997	44798	45598	46398	47198
43	47998	48798	49598	50397	51196	51995	52794	53593	54392	55191
44	55989	56787	57585	58383	59181	59979	60776	61574	62371	63168
45	63965	64762	65558	66355	67151	67948	68744	69540	70335	71131
46	71926	72722	73517	74312	75107	75902	76696	77491	78285	79079
47	79873	80667	81461	82254	83048	83841	84634	85427	86220	87013
48	87806	88598	89390	90182	90974	91766	92558	93350	94141	94932
49	95723	96514	97305	98096	98887	99677	00467	01257	02047	02837
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	7403627	04416	05206	05995	06784	07573	08362	09151	09939	10728
51	11516	12304	13092	13880	14660	15455	16243	17030	17817	18604
52	19391	20177	20964	21750	22537	23323	24109	24895	25680	26466
53	27251	28037	28822	29607	30392	31176	31961	32745	33530	34314
54	35098	35882	36665	37449	38232	39016	39799	40582	41365	42147
55	42930	43712	44495	45277	46059	46841	47622	48404	49185	49967
56	50748	51529	52310	53091	53871	54652	55432	56212	56992	57772
57	58552	59332	60111	60890	61670	62449	63228	64006	64785	65564
58	66342	67120	67898	68676	69484	70232	71009	71787	72564	73341
59	74118	74895	75672	76448	77225	78001	78777	79553	80329	81105
560	81880	82656	89431	84206	84981	85156	86531	87306	88080	88854
61	89629	90403	91177	91950	92724	93498	94271	95044	95817	96590
62	97363	98136	98908	99681	00453	01225	01997	02769	03541	04312
63	7505084	05855	06626	07398	08168	08939	09710	10480	11251	12021
64	12791	13561	14331	15101	15870	16639	17409	18178	18947	19716
65	20484	21253	22022	22790	23558	24326	25094	25862	26629	27397
66	28164	28932	29699	30466	31232	31999	32766	33532	34298	35065
67	35831	36596	37362	38128	38893	39659	40424	41189	41954	42719
68	43483	44248	45012	45777	46541	47305	48069	48832	49596	50359
69	51123	51886	52649	53412	54175	54937	55700	56463	57224	57987
570	58749	59510	60272	61034	61795	62556	63318	64079	64840	65600
71	66361	67122	67882	68642	69402	70162	70922	71682	72442	73201
72	73960	74719	75479	76237	76996	77755	78513	79272	80030	80788
73	81546	82304	83062	83819	84577	85334	86091	86848	87605	88362
74	89119	89875	90632	91388	92144	92900	93656	94412	95168	95923
75	96678	97434	98189	98944	99699	00453	01208	01962	02717	03471
76	7604225	04979	05733	06486	07240	07993	08746	09500	10253	11005
77	11758	12511	13263	14016	14768	15520	16272	17024	17775	18527
78	19278	20030	20781	21532	22283	23034	23784	24535	25285	26035
79	26786	27536	28286	29035	29785	30534	31284	32033	32782	33531
580	34280	35029	35777	36526	37274	38022	38770	39518	40266	41014
81	41761	42509	43256	44003	44750	45497	46244	46991	47737	48484
82	49230	49976	50722	51468	52214	52959	53705	54450	55195	55941
83	56686	57430	58175	58920	59664	60409	61153	61897	62641	63385
84	64128	64872	65616	66359	67102	67845	68588	69331	70074	70816
85	71559	72301	73043	73785	74527	75269	76011	76752	77494	78235
86	78976	79717	80458	81199	81940	82680	83421	84161	84901	85641
87	86381	87121	87860	88600	89339	90079	90818	91557	92296	93035
88	93773	94512	95250	95988	96727	97465	98203	98940	99678	00415
89	7701153	01890	02627	03364	04101	04838	05575	06311	07048	07784
590	08520	09256	09992	10728	11463	12199	12934	13670	14405	15140
91	15875	16610	17344	18079	18813	19547	20282	21016	21750	22483
92	23217	23951	24684	25417	26150	26883	27616	28349	29082	29814
93	30547	31279	32011	32743	33475	34207	34939	35670	36402	37133
94	37864	38595	39326	40057	40788	41519	42249	42979	43710	44440
95	45170	45899	46629	47359	48088	48818	49547	50276	51005	51734
96	52463	53191	53920	54648	55376	56104	56832	57560	58288	59016
97	59743	60471	61198	61925	62652	63379	64106	64833	65559	66285
98	67012	67738	68464	69190	69916	70641	71367	72093	72818	73543
99	74268	74993	75718	76443	77167	77892	78616	79340	80065	80789
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	7781512	82236	82960	83683	84407	85130	85853	86576	87299	88022
01	88745	89467	90190	90912	91634	92356	93078	93800	94522	95243
02	95965	96686	97407	98129	98850	99570	00291	01012	01732	02453
03	7803173	03893	04613	05333	06053	06773	07492	08212	08931	09650
04	10369	11088	11807	12526	13245	13963	14681	15400	16118	16836
05	17554	18271	18989	19707	20424	21141	21859	22576	23293	24009
06	24726	25443	26159	26876	27592	28308	29024	29740	30456	31171
07	31887	32602	33318	34033	34748	35463	36178	36892	37607	38321
08	39036	39750	40464	41178	41892	42606	43319	44033	44746	45460
09	46173	46886	47599	48312	49024	49737	50450	51162	51874	52586
610	53298	54010	54722	55434	56145	56857	57568	58279	58990	59701
11	60412	61123	61833	62544	63254	63965	64675	65385	66095	66804
12	67514	68224	68933	69643	70352	71061	71770	72479	73188	73896
13	74605	75313	76021	76730	77438	78146	78853	79561	80269	80976
14	81684	82391	83098	83805	84512	85219	85926	86632	87339	88045
15	88751	89457	90163	90869	91575	92281	92986	93691	94397	95102
16	95807	96512	97217	97922	98626	99331	00035	00739	01444	02148
17	7902852	03555	04259	04963	05666	06370	07073	07776	08479	09182
18	09885	10587	11290	11992	12695	13397	14099	14801	15503	16205
19	16906	17608	18309	19011	19712	20413	21114	21815	22516	23216
620	23917	24617	25318	26018	26718	27418	28118	28817	29517	30217
21	30916	31615	32314	33013	33712	34411	35110	35809	36507	37206
22	37904	38602	39300	39998	40696	41394	42091	42789	43486	44183
23	44880	45577	46274	46971	47668	48365	49061	49757	50454	51150
24	51846	52542	53238	53933	54629	55324	56020	56715	57410	58105
25	58800	59495	60190	60884	61579	62273	62967	63662	64356	65049
26	65743	66437	67131	67824	68517	69211	69904	70597	71290	71983
27	72675	73368	74060	74753	75445	76137	76829	77521	78213	78905
28	79596	80288	80979	81671	82362	83053	83744	84435	85125	85816
29	86506	87197	87887	88577	89267	89957	90647	91337	92027	92716
630	93405	94095	94784	95473	96162	96851	97540	98228	98917	99605
31	8000294	00982	01670	02358	03046	03733	04421	05109	05796	06484
32	07171	07858	08545	09232	09919	10605	11292	11978	12665	13351
33	14037	14723	15409	16095	16781	17466	18152	18837	19522	20207
34	20893	21577	22262	22947	23632	24316	25001	25685	26369	27053
35	27737	28421	29105	29789	30472	31155	31839	32522	33205	33888
36	34571	35254	35937	36619	37302	37984	38666	39348	40030	40712
37	41394	42076	42758	43439	44121	44802	45483	46164	46845	47526
38	48207	48887	49568	50248	50929	51609	52289	52969	53649	54329
39	55009	55688	56368	57047	57726	58405	59085	59763	60442	61121
640	61800	62478	63157	63835	64513	65191	65869	66547	67225	67903
41	68580	69258	69935	70612	71290	71967	72644	73320	73997	74674
42	75350	76027	76703	77379	78055	78731	79407	80083	80759	81434
43	82110	82785	83460	84135	84811	85485	86160	86835	87510	88184
44	88859	89533	90207	90881	91555	92229	92903	93577	94250	94924
45	95597	96270	96944	97617	98290	98962	99635	00308	00980	01653
46	8102325	02997	03669	04342	05013	05685	06357	07029	07700	08371
47	09043	09714	10385	11056	11727	12398	13068	13739	14409	15080
48	15750	16420	17090	17760	18430	19100	19769	20439	21108	21778
49	22447	23116	23785	24454	25123	25792	26460	27129	27797	28465
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	8129134	29802	30470	31137	31805	32473	33141	33808	34475	35143
51	35810	36477	37144	37811	38477	39144	39811	40477	41144	41810
52	42476	43142	43808	44474	45139	45805	46471	47136	47801	48467
53	49132	49797	50462	51127	51791	52456	53120	53785	54449	55113
54	55777	56441	57105	57769	58433	59096	59760	60423	61087	61750
55	62413	63076	63739	64402	65064	65727	66389	67052	67714	68376
56	69038	69700	70362	71024	71686	72347	73009	73670	74331	74993
57	75654	76315	76975	77636	78297	78958	79618	80278	80939	81599
58	82259	82919	83579	84239	84898	85558	86217	86877	87536	88195
59	88854	89513	90172	90831	91489	92148	92806	93465	94123	94781
660	95439	96097	96755	97413	98071	98728	99386	00043	00700	01357
61	8202015	02672	03328	03985	04642	05298	05955	06611	07268	07924
62	08580	09236	09892	10548	11203	11859	12514	13170	13825	14480
63	15135	15790	16445	17100	17755	18409	19064	19718	20372	21027
64	21681	22335	22989	23642	24296	24950	25603	26257	26910	27563
65	28216	28869	29522	30175	30828	31481	32133	32786	33438	34090
66	34742	35394	36046	36698	37350	38002	38653	39305	39956	40607
67	41258	41909	42560	43211	43862	44513	45163	45814	46464	47114
68	47765	48415	49065	49715	50364	51014	51664	52313	52963	53612
69	54261	54910	55559	56208	56857	57506	58154	58803	59451	60100
670	60748	61396	62044	62692	63340	63988	64635	65283	65931	66578
71	67225	67872	68519	69166	69813	70460	71107	71753	72400	73046
72	73693	74339	74985	75631	76277	76923	77569	78214	78860	79505
73	80151	80796	81441	82086	82731	83376	84021	84665	85310	85955
74	86599	87243	87887	88532	89176	89820	90463	91107	91751	92394
75	93038	93681	94324	94967	95611	96254	96896	97539	98182	98824
76	99467	00109	00752	01394	02036	02678	03320	03962	04604	05245
77	8305887	06528	07169	07811	08452	09093	09734	10375	11016	11656
78	12297	12937	13578	14218	14858	15499	16139	16778	17418	18058
79	18698	19337	19977	20616	21255	21895	22534	23173	23812	24450
680	25089	25728	26366	27005	27643	28281	28919	29558	30195	30833
81	31471	32109	32746	33384	34021	34659	35296	35933	36570	37207
82	37844	38480	39117	39754	40390	41027	41663	42299	42935	43571
83	44207	44843	45479	46114	46750	47385	48021	48656	49291	49926
84	50561	51196	51831	52465	53100	53735	54369	55003	55638	56272
85	56906	57540	58174	58807	59441	60075	60708	61341	61975	62608
86	63241	63874	64507	65140	65773	66405	67038	67670	68303	68935
87	69567	70199	70832	71463	72095	72727	73359	73990	74622	75253
88	75884	76516	77147	77778	78409	79039	79670	80301	80931	81562
89	82192	82822	83453	8[illegible]33	84713	85343	85973	86602	87232	87861
690	88491	89120	89750	90379	91008	91637	92266	92895	93523	94152
91	94780	95409	96037	96666	97294	97922	98550	99178	99806	00433
92	8401061	01688	02316	02943	03571	04198	04825	05452	06079	06706
93	07332	07959	08586	09212	09838	10465	11091	11717	12343	12969
94	13595	14220	14846	15472	16097	16723	17348	17973	18598	19223
95	19848	20473	21098	21722	22347	22971	23596	24220	24844	25468
96	26092	26716	27340	27964	28588	29211	29835	30458	31081	31705
97	32328	32951	33574	34197	34819	35442	36065	36687	37310	37932
98	38554	39176	39798	40420	41042	41664	42286	42907	43529	44150
99	44772	45393	46014	46635	47256	47877	8498	49119	49739	50360
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	8450980	51601	52221	52841	53461	54081	54701	55321	55941	56561
01	57180	57800	58419	59038	59658	60277	60896	61515	62134	62752
02	63371	63990	64608	65227	65845	66463	67081	67700	68318	68935
03	69553	60171	70789	71406	72024	72641	73258	73876	74493	75110
04	75727	76343	76960	77577	78193	78810	79426	80043	80659	81275
05	81891	82507	83123	83739	84355	84970	85586	86201	86817	87432
06	88047	88662	89277	89892	90507	91122	91736	92351	92965	93580
07	94194	94808	95423	96037	96651	97264	97878	98492	99106	99719
08	8500333	00946	01559	02172	02786	03399	04011	04624	05237	05850
09	06462	07075	07687	08300	08912	09524	10136	10748	11360	11972
710	12583	13195	13807	14418	15030	15641	16252	16863	17474	18085
11	18696	19307	19917	20528	21139	21749	22359	22970	23580	24190
12	24800	25410	26020	26629	27239	27849	28458	29068	29677	30286
13	30895	31504	32113	32722	33331	33940	34548	35157	35765	36374
14	36982	37590	38198	38807	39414	40022	40630	41238	41845	42453
15	43060	43668	44275	44882	45489	46096	46703	47310	47917	48524
16	49130	49737	50343	50950	51556	52162	52768	53374	53980	54586
17	55192	55797	56403	57008	57614	58219	58824	59429	60035	60640
18	61244	61849	62454	63059	63663	64268	64872	65476	66081	66685
19	67289	67893	68497	69101	69704	70308	70912	71515	72118	72722
720	73325	73928	74531	75134	75737	76340	76943	77545	78148	78750
21	79353	79955	80557	81159	81761	82363	82965	83567	84169	84770
22	85372	85973	86575	87176	87777	88379	88980	89581	90181	90782
23	91383	91984	92584	93185	93785	94385	94986	95586	96186	96786
24	97386	97985	98585	99185	99784	00384	00983	01583	02182	02781
25	8603380	03979	04578	05177	05776	06374	06973	07571	08170	08768
26	09366	09964	10562	11160	11758	12356	12954	13552	14149	14747
27	15344	15941	16539	17136	17733	18330	18927	19524	20121	20717
28	21314	21910	22507	23103	23699	24296	24892	25488	26084	26680
29	27275	27871	28467	29062	29658	30253	30848	31443	32039	32634
730	33229	33823	34418	35013	35608	36202	36797	37391	37985	38580
31	39174	39768	40362	40956	41550	42143	42737	43331	43924	44517
32	45111	45704	46297	46890	47483	48076	48669	49262	49855	50447
33	51040	51632	52225	52817	53409	54001	54593	55185	55777	56369
34	56961	57552	58144	58735	59327	59918	60509	61100	61691	62282
35	62873	63464	64055	64646	65236	65827	66417	67008	67598	68188
36	68778	69368	69958	70548	71138	71728	72317	72907	73496	74086
37	74675	75264	75853	76442	77031	77620	78209	78798	79387	79975
38	80564	81152	81740	82329	82917	83505	84093	84681	85269	85857
39	86444	87032	87620	88207	88794	89382	89969	90556	91143	91730
740	92317	92904	93491	94077	94664	95251	95837	96423	97010	97596
41	98182	98768	99354	99940	00526	01112	01697	02283	02868	03454
42	8704039	04624	05210	05794	06380	06965	07549	08134	08719	09304
43	09888	10473	11057	11641	12226	12810	13394	13978	14562	15146
44	15729	16313	16897	17480	18064	18647	19230	19814	20397	20980
45	21563	22146	22728	23311	23894	24476	25059	25641	26224	26806
46	27388	27970	28552	29134	29716	30298	30880	31462	32043	32625
47	33206	33787	34369	34950	35531	36112	36693	37274	37855	38435
48	39016	39597	40177	40757	41338	41918	42498	43078	43658	44238
49	44818	45398	45978	46557	47137	47716	48296	48875	49454	50034
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	8750613	51192	51771	52349	52928	53507	54086	54664	55243	55821
51	56399	56978	57556	58134	58712	59290	59868	60446	61023	61601
52	62178	62756	63333	63911	64488	65065	65642	66219	66796	67373
53	67950	68526	69103	69680	70256	70833	71409	71985	72561	73137
54	73713	74289	74865	75441	76017	76592	77168	77743	78319	78894
55	79470	80045	80620	81195	81770	82345	82919	83494	84069	84643
56	85218	85792	86367	86941	87515	88089	88663	89237	89811	90385
57	90959	91532	92106	92680	93253	93826	94400	94973	95546	96119
58	96692	97265	97838	98411	98983	99556	00128	00701	01273	01846
59	8802418	02990	03562	04134	04706	05278	05850	06421	06993	07564
760	08136	08707	09279	09850	10421	10992	11563	12134	12705	13276
61	13847	14417	14988	15558	16129	16699	17269	17840	18410	18980
62	19550	20120	20689	21259	21829	22398	22968	23537	24107	24676
63	25245	25815	26384	26953	27522	28090	28659	29228	29797	30365
64	30934	31502	32070	32639	33207	33775	34343	34911	35479	36047
65	36614	37182	37750	38317	38885	39452	40019	40586	41154	41721
66	42288	42855	43421	43988	44555	45122	45688	46255	46821	47387
67	47954	48520	49086	49652	50218	50784	51350	51915	52481	53047
68	53612	54178	54743	55308	55874	56439	57004	57569	58134	58699
69	59263	59828	60393	60957	61522	62086	62651	63215	63779	64343
770	64907	65471	66035	66599	67163	67726	68290	68854	69417	69980
71	70544	71107	71670	72233	72796	73359	73922	74485	75048	75610
72	76173	76736	77298	77860	78423	78985	79547	80109	80671	81233
73	81795	82357	82918	83480	84042	84603	85165	85726	86287	86848
74	87410	87971	88532	89093	89653	90214	90775	91336	91896	92457
75	93017	93577	94138	94698	95258	95818	96378	96938	97498	98058
76	98617	99177	99736	00296	00855	01415	01974	02533	03092	03651
77	8904210	04769	05328	05887	06445	07004	07563	08121	08679	09238
78	09796	10354	10912	11470	12028	12586	13144	13702	14259	14817
79	15375	15932	16489	17047	17604	18161	18718	19275	19832	20389
780	20946	21503	22059	22616	23173	23729	24285	24842	25398	25954
81	26510	27066	27622	28178	28734	29290	29846	30401	30957	31512
82	32068	32623	33178	33733	34288	34843	35398	35953	36508	37063
83	37618	38172	38727	39281	39836	40390	40944	41498	42053	42607
84	43161	43715	44268	44822	45376	45929	46483	47037	47590	48143
85	48697	49250	49803	50356	50909	51462	52015	52568	53120	53673
86	54225	54778	55330	55883	56435	56987	57539	58092	58644	59195
87	59748	60299	60851	61403	61954	62506	63057	63608	64160	64711
88	65262	65813	66364	66915	67466	68017	68568	69118	69669	70220
89	70770	71320	71871	72421	72971	73521	74071	74621	75171	75721
790	76271	76821	77370	77920	78469	79019	79568	80117	80667	81216
91	81765	82314	82863	83412	83960	89509	85058	85606	86155	86703
92	87252	87800	88348	88897	89445	89993	90541	91089	91636	92184
93	92732	93279	93827	94375	94922	95469	96017	96564	97111	97658
94	98205	98752	99299	99846	00392	00939	01486	02032	02579	03125
95	9003671	04218	04764	05310	05856	06402	06948	07494	08039	08585
96	09131	09676	10222	10767	11313	11858	12403	12948	13493	14038
97	14583	15128	15673	16218	16762	17307	17851	18396	18940	19485
98	20029	20573	21117	21661	22205	22749	23293	23837	24381	24924
99	25468	26011	26555	27098	27641	28185	28728	29271	29814	30357
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	9030900	31443	31985	32528	33071	33613	34156	34698	35241	35783
01	36325	36867	37409	37951	38493	39035	39577	40119	40661	41202
02	41744	42285	42827	43368	43909	44450	44992	45533	46074	46615
03	47155	47696	48237	48778	49318	49859	50399	50940	51480	52020
04	52560	53101	53641	54181	54721	55260	55800	56340	56880	57419
05	57959	58498	59038	59577	60116	60655	61195	61734	62273	62812
06	63350	63889	64428	64967	65505	66044	66582	67121	67659	68197
07	68735	69273	69812	70350	70887	71425	71963	72501	73038	73576
08	74114	74651	75188	75726	76263	76800	77337	77874	78411	78948
09	79485	80022	80559	81095	81632	82169	82705	83241	83778	84314
810	84850	85386	85922	86458	86994	87530	88066	88602	89137	89673
11	90209	90744	91279	91815	92350	92885	93420	93955	94490	95025
12	95560	96095	96630	97165	97699	98234	98768	99302	99837	00371
13	9100905	01440	01974	02508	03042	03576	04109	04643	05177	05710
14	06244	06778	07311	07844	08378	08911	09444	09977	10510	11043
15	11576	12109	12642	13174	13707	14240	14772	15305	15837	16369
16	16902	17434	17966	18498	19030	19562	20094	20626	21157	21689
17	22221	22752	23284	23815	24346	24878	25409	25940	26471	27002
18	27533	28064	28595	29126	29656	30187	30717	31248	31778	32309
19	32839	33369	33899	34430	34960	35490	36019	36549	37079	37609
820	38139	38668	39198	39727	40257	40786	41315	41844	42373	42903
21	43432	43961	44489	45018	45547	46076	46604	47133	47661	48190
22	48718	49246	49775	50303	50831	51359	51887	52415	52943	53471
23	53998	54526	55054	55581	56109	56636	57163	57691	58218	58745
24	59272	59799	60326	60853	61380	61907	62433	62960	63487	64013
25	64539	65066	65592	66118	66645	67171	67697	68223	68749	69275
26	69800	70326	70852	71378	71903	72429	72954	73479	74005	74530
27	75055	75580	76105	76630	77155	77680	78205	78730	79254	79779
28	80303	80828	81352	81877	82401	82925	83449	83973	84497	85021
29	85545	86069	86593	87117	87640	88164	88687	89211	89734	90258
830	90781	91304	91827	92350	92873	93396	93919	94442	94965	95488
31	96010	96533	97055	97578	98100	98623	99145	99667	00189	00711
32	9201233	01755	02277	02799	03321	03842	04364	04886	05407	05929
33	06450	06971	07493	08014	08535	09056	09577	10098	10619	11140
34	11661	12181	12702	13222	13743	14263	14784	15304	15824	16345
35	16865	17385	17905	18425	18945	19465	19984	20504	21024	21543
36	22063	22582	23102	23621	24140	24659	25179	25698	26217	26736
37	27255	27773	28292	28811	29330	29848	30367	30885	31404	31922
38	32440	32958	33477	33995	34513	35031	35549	36066	36584	37102
39	37620	38137	38655	39172	39690	40207	40724	41242	41759	42276
840	42793	43310	43827	44344	44860	45377	45894	46410	46927	47444
41	47960	48476	48993	49509	50025	50541	51057	51573	52089	52605
42	53121	53637	54152	54668	55184	55699	56215	56730	57245	57761
43	58276	58791	59306	59821	60336	60851	61366	61880	62395	62910
44	63424	63939	64453	64968	65482	65997	66511	67025	67539	68053
45	68567	69081	69595	70109	70622	71136	71650	72163	72677	73190
46	73704	74217	74730	75243	75757	76270	76783	77296	77808	78321
47	78834	79347	79859	80372	80885	81397	81909	82422	82934	83446
48	83959	84471	84983	85495	86007	86518	87030	87542	88054	88565
49	89077	89588	90100	90611	91123	91634	92145	92656	93167	93678
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	9294189	94700	95211	95722	96233	96743	97254	97764	98275	98785
51	99296	99806	00316	00826	01336	01847	02357	02866	03376	03886
52	9304396	04906	05415	05925	06434	06944	07453	07963	08472	08981
53	09490	09999	10508	11017	11526	12035	12544	13053	13562	14070
54	14579	15087	15596	16104	16612	17121	17629	18137	18645	19153
55	19661	20169	20677	21185	21692	22200	22708	23215	23723	24230
56	24738	25245	25752	26259	26767	27274	27781	28288	28795	29301
57	29808	30315	30822	31328	31835	32341	32848	33354	33860	34367
58	34873	35379	35885	36391	36897	37403	37909	38415	38920	39426
59	39932	40437	40943	41448	41953	42459	42964	43469	43974	44479
860	44985	45489	45994	46499	47004	47509	48013	48518	49023	49527
61	50032	50536	51040	51544	52049	52553	53057	53561	54065	54569
62	55073	55576	56080	56584	57087	57591	58095	58598	59101	59605
63	60108	60611	61114	61617	62120	62623	63126	63629	64132	64635
64	65137	65640	66143	66645	67148	67650	68152	68655	69157	69659
65	70161	70663	71165	71667	72169	72671	73172	73674	74176	74677
66	75179	75680	76182	76683	77184	77686	78187	78688	79189	79690
67	80191	80692	81193	81693	82194	82695	83195	83696	84196	84697
68	85197	85698	86198	86698	87198	87698	88198	88698	89198	89698
69	90198	90697	91197	91697	92196	92696	93195	93695	94194	94693
870	95193	95692	96191	96690	97189	97688	98187	98685	99184	99683
71	9400182	00680	01179	01677	02176	02674	03172	03670	04169	04667
72	05165	05663	06161	06659	07157	07654	08152	08650	09147	09645
73	10142	10640	11137	11635	12132	12629	13126	13623	14120	14617
74	15114	15611	16108	16605	17101	17598	18095	18591	19088	19584
75	20081	20577	21073	21569	22065	22562	23058	23553	24049	24545
76	25041	25537	26032	26528	27024	27519	28015	28510	29005	29501
77	29996	30491	30986	31481	31976	32471	32966	33461	33956	34450
78	34945	35440	35934	36429	36923	37418	37912	38406	38900	39395
79	39889	40383	40877	41371	41865	42358	42852	43346	43840	44333
880	44827	45320	45814	46307	46800	47294	47787	48280	48773	49266
81	49759	50252	50745	51238	51730	52223	52716	53208	53701	54193
82	54686	55178	55671	56163	56655	57147	57639	58131	58623	59115
83	59607	60099	60591	61082	61574	62066	62557	63049	63540	64031
84	64523	65014	65505	65996	66487	66978	67469	67960	68451	68942
85	69433	69923	70414	70905	71395	71886	72376	72866	73357	73847
86	74337	74827	75317	75807	76297	76787	77277	77767	78257	78747
87	79236	79726	80215	80705	81194	81684	82173	82662	83151	83641
88	84130	84619	85108	85597	86085	86574	87063	87552	88040	88529
89	89018	89506	89995	90483	90971	91460	91948	92436	92924	93412
890	93900	94388	94876	95364	95852	96339	96827	97315	97802	98290
91	98777	99264	99752	00239	00726	01213	01701	02188	02675	03162
92	9503649	04135	04622	05109	05596	06082	06569	07055	07542	08028
93	08515	09001	09487	09973	10459	10946	11432	11918	12404	12889
94	13375	13861	14347	14832	15318	15803	16289	16774	17260	17745
95	18230	18716	19201	19686	20171	20656	21141	21626	22111	22595
96	23080	23565	24049	24534	25018	25503	25987	26472	26956	27440
97	27924	28409	28893	29377	29861	30345	30828	31312	31796	32280
98	32763	33247	33731	34214	34697	35181	35664	36147	36631	37114
99	37597	38080	38563	39046	39529	40012	40494	40977	41460	41943
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	9542425	42908	43390	43873	44355	44837	45319	45802	46284	46766
01	47248	47730	48212	48694	49176	49657	50139	50621	51102	51584
02	52065	52547	53028	53510	53991	54472	54953	55434	55916	56397
03	56878	57358	57839	58320	58801	59282	59762	60243	60723	61204
04	61684	62165	62645	63125	63606	64086	64566	65046	65526	66006
05	66486	66966	67445	67925	68405	68885	69364	69844	70323	70803
06	71282	71761	72241	72720	73199	73678	74157	74636	75115	75594
07	76073	76552	77030	77509	77988	78466	78945	79423	79902	80380
08	80858	81337	81815	82293	82771	83249	83727	84205	84683	85161
09	85639	86117	86594	87072	87549	88027	88505	88982	89459	89937
910	90414	90891	91368	91845	92322	92800	93276	93753	94230	94707
11	95184	95660	96137	96614	97090	97567	98043	98520	98996	99472
12	99948	00425	00901	01377	01853	02329	02805	03281	03756	04232
13	9604708	05183	05659	06135	06610	07086	07561	08036	08512	08987
14	09462	09937	10412	10887	11362	11837	12312	12787	13262	13736
15	14211	14686	15160	15635	16109	16583	17058	17532	18006	18481
16	18955	19429	19903	20377	20851	21325	21799	22272	22746	23220
17	23693	24167	24640	25114	25587	26061	26534	27007	27481	27954
18	28427	28900	29373	29846	30319	30792	31264	31737	32210	32683
19	33155	33628	34100	34573	35045	35517	35990	36462	36934	37406
920	37878	38350	38822	39294	39766	40238	40710	41181	41653	42125
21	42596	43068	43539	44011	44482	44953	45425	45896	46367	46838
22	47309	47780	48251	48722	49193	49664	50135	50605	51076	51546
23	52017	52488	52958	53428	53899	54369	54839	55309	55780	56250
24	56720	57190	57660	58130	58599	59069	59539	60009	60478	60948
25	61417	61887	62356	62826	63295	63764	64233	64703	65172	65641
26	66110	66579	67048	67517	67985	68454	68923	69392	69860	70329
27	70797	71266	71734	72203	72671	73139	73607	74076	74544	75012
28	75480	75948	76416	76884	77351	77819	78287	78754	79222	79690
29	80157	80625	81092	81559	82027	82494	82961	83428	83895	84362
930	84829	85296	85763	86230	86697	87164	87630	88097	88564	89030
31	89497	89963	90430	90896	91362	91829	92295	92761	93227	93693
32	94159	94625	95091	95557	96023	96488	96954	97420	97885	98351
33	98816	99282	99747	00213	00678	01143	01608	02074	02539	03004
34	9703469	03934	04399	04863	05328	05793	06258	06722	07187	07652
35	08116	08581	09045	09509	09974	10438	10902	11366	11830	12294
36	12758	13222	13686	14150	14614	15078	15542	16005	16469	16932
37	17396	17859	18323	18786	19249	19713	20176	20639	21102	21565
38	22028	22491	22954	23417	23880	24343	24805	25268	25731	26193
39	26656	27118	27581	28043	28506	28968	29430	29892	30354	30816
940	31279	31741	32202	32664	33126	33588	34050	34511	34973	35435
41	35896	36358	36819	37281	37742	38203	38664	39126	39587	40048
42	40509	40970	41431	41892	42353	42814	43274	43735	44196	44656
43	45117	45577	46038	46498	46959	47419	47879	48340	48800	49260
44	49720	50180	50640	51100	51560	52020	52479	52939	53399	53858
45	54318	54778	55237	55697	56156	56615	57075	57534	57993	58452
46	58911	59370	59829	60288	60747	61206	61665	62124	62582	63041
47	63500	63958	64417	64875	65334	65792	66251	66709	67167	67625
48	68083	68541	69000	69458	69915	70373	70831	71289	71747	72204
49	72662	73120	73577	74035	74492	74950	75407	75864	76322	76779
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	9777236	77693	78150	78607	79064	79521	79978	80435	80892	81348
51	81805	82262	82718	83175	83631	84088	84544	85001	85457	85913
52	86369	86826	87282	87738	88194	88650	89106	89562	90017	90473
53	90929	91385	91840	92296	92751	93207	93662	94118	94573	95028
54	95484	95939	96394	96849	97304	97759	98214	98669	99124	99579
55	9800034	00488	00943	01398	01852	02307	02761	03216	03670	04125
56	04579	05033	05487	05942	06396	06850	07304	07758	08212	08666
57	09119	09573	10027	10481	10934	11388	11841	12295	12748	13202
58	13655	14108	14562	15015	15468	15921	16374	16827	17280	17733
59	18186	18639	19092	19544	19997	20450	20902	21355	21807	22260
960	22712	23165	23617	24069	24522	24974	25426	25878	26330	26782
61	27234	27686	28138	28589	29041	29493	29945	30396	30848	31299
62	31751	32202	32654	33105	33556	34007	34459	34910	35361	35812
63	36263	36714	37165	37616	38066	38517	38968	39419	39869	40320
64	40770	41221	41671	42122	42572	43022	43473	43923	44373	44823
65	45273	45723	46173	46623	47073	47523	47973	48422	48872	49322
66	49771	50221	50670	51120	51569	52019	52468	52917	53366	53816
67	54265	54714	55163	55612	56061	56510	56959	57407	57856	58305
68	58754	59202	59651	60099	60548	60996	61445	61893	62341	62790
69	63238	63686	64134	64582	65030	65478	65926	66374	66822	67270
970	67717	68165	68613	69060	69508	69955	70403	70850	71298	71745
71	72192	72640	73087	73534	73981	74428	74875	75322	75769	76216
72	76663	77109	77556	78003	78450	78896	79343	79789	80236	80682
73	81128	81575	82021	82467	82913	83360	83806	84252	84698	85144
74	85590	86035	86481	86927	87373	87818	88264	88710	89155	89601
75	90046	90492	90937	91382	91828	92273	92718	93163	93608	94053
76	94498	94943	95388	95833	96278	96722	97167	97612	98057	98501
77	98946	99390	99835	00279	00723	01168	01612	02056	02500	02944
78	9903389	03833	04277	04721	05164	05608	06052	06496	06940	07383
79	07827	08271	08714	09158	09601	10044	10488	10931	11374	11818
980	12261	12704	13147	13590	14033	14476	14919	15362	15805	16247
81	16690	17133	17575	18018	18461	18903	19345	19788	20230	20673
82	21115	21557	21999	22441	2288.	23326	23768	24210	24651	25093
83	25535	25977	26419	26800	27302	27744	28185	28627	29068	29510
84	29951	30392	30834	31275	31716	32157	32598	33039	33480	33921
85	34362	34803	35244	35685	36125	36566	37007	37447	37888	38329
86	38769	39209	39650	40090	40531	40971	41411	41851	42291	42731
87	43171	43611	44051	44491	44931	45371	45811	46250	46690	47130
88	47569	48009	48448	48888	49327	49767	50206	50645	51085	51524
89	51963	52402	52841	53280	53719	54158	54597	55036	55474	55913
990	56352	56791	57229	57668	58106	58545	58983	59422	59860	60298
91	60736	61175	61613	62051	62489	62927	63365	63803	64241	64679
92	65117	65554	65992	66430	66867	67305	67743	68180	68618	69055
93	69492	69930	70367	70804	71241	71679	72116	72553	72990	73427
94	73864	74301	74737	75174	75611	76048	76484	76921	77358	77794
95	78231	78667	79104	79540	79976	80413	80849	81285	81721	82157
96	82593	83029	83465	83901	84337	84773	85209	85645	86080	86516
97	86951	87387	87823	88258	88694	89129	89564	90000	90435	90870
98	91305	91740	92176	92611	93046	93481	93916	94350	94785	95220
99	95655	96089	96524	96959	97393	97828	98262	98697	99131	99566
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tafel der Quadratzahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000.

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1	1	10201	40401	90601	160801	251001	361201	491401	641601	811801
2	4	10404	40804	91204	161604	252004	362404	492804	643204	813604
3	9	10609	41209	91809	162409	253009	363609	494209	644809	815409
4	16	10816	41616	92416	163216	254016	364816	495616	646416	817216
5	25	11025	42025	93025	164025	255025	366025	497025	648025	819025
6	36	11236	42436	93636	164836	256036	367236	498436	649636	820836
7	49	11449	42849	94249	165649	257049	364849	499849	651249	822649
8	64	11664	43264	94864	166464	258064	369664	501264	652864	824464
9	81	11881	43681	95481	167281	259081	370881	502681	654481	826281
10	100	12100	44100	96100	168100	260100	372100	504100	656100	828100
11	121	12321	44521	96721	168921	261121	373321	505521	657721	829921
12	144	12544	44944	97344	169744	262144	374544	506944	659344	831744
13	169	12769	45369	97969	170569	263169	375769	508369	660969	833569
14	196	12996	45796	98596	171396	264196	376996	509796	662596	835396
15	225	13225	46225	99225	172225	265225	378225	511225	664225	837225
16	256	13456	46656	99856	173056	266256	379456	512656	665856	839056
17	289	13689	47089	100489	173889	267289	380689	514089	667489	840889
18	324	13924	47524	101124	174724	268324	381924	515524	669124	842724
19	361	14161	47961	101761	175561	269361	383161	516961	670761	844561
20	400	14400	48400	102400	176400	270400	384400	518400	672400	846400
21	441	14641	48841	103041	177241	271441	385641	519841	674041	848241
22	484	14884	49284	103684	178084	272484	386884	521284	675684	850084
23	529	15129	49729	104329	178929	273529	388129	522729	677329	851929
24	576	15376	50176	104976	179776	274576	389376	524176	678976	853776
25	625	15625	50625	105625	180625	275625	390625	525625	680625	855625
26	676	15876	51076	106276	181476	276676	391876	527076	682276	857476
27	729	16129	51529	106929	182329	277729	393129	528529	683929	859329
28	784	16384	51984	107584	183184	278784	394384	529984	685584	861184
29	841	16641	52441	108241	184041	279841	395641	531441	687241	863041
30	900	16900	52900	108900	184900	280900	396900	532900	688900	864900
31	961	17161	53361	109561	185761	281961	398161	534361	690561	866761
32	1024	17424	53824	110224	186624	283024	399424	535824	692224	868624
33	1089	17689	54289	110889	187489	284089	400689	537289	693889	870489
34	1156	17956	54756	111556	188356	285156	401956	538756	695556	872356
35	1225	18225	55225	112225	189225	286225	403225	540225	697225	874225
36	1296	18496	55696	112896	190096	287296	404496	541696	698896	876096
37	1369	18769	56169	113569	190961	288369	405769	543169	700569	877969
38	1444	19044	56644	114244	191844	289444	407044	544644	702244	879844
39	1521	19321	57121	114921	192721	290521	408321	546121	703921	881721
40	1600	19600	57600	115600	193600	291600	409600	547600	705600	883600
41	1681	19881	58081	116281	194481	292681	410881	549081	707281	885481
42	1764	20164	58564	116964	195364	293764	412164	550564	708964	887364
43	1849	20449	59049	117649	196249	294849	413449	552049	710649	889249
44	1936	20736	59536	118336	197136	295936	414736	553536	712336	891136
45	2025	21025	60025	119025	198025	297025	416025	555025	714025	893025
46	2116	21316	60516	119716	198916	298116	417316	556516	715716	894916
47	2209	21609	61009	120409	199809	299209	418609	558009	717409	896809
48	2304	21904	61504	121104	200704	300304	419904	559504	719104	898704
49	2401	22201	62001	121801	201601	301401	421201	561001	720801	900601
50	2500	22500	62500	122500	202500	302500	422500	562500	722500	902500

Tafel der Quadratzahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000.

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
51	2601	22801	63001	123201	203401	303601	423801	564001	724201	904401
52	2704	23104	63504	123904	204304	304704	425104	565504	725904	906304
53	2809	23409	64009	121609	205209	305809	426409	567009	727609	908209
54	2916	23716	64516	125316	206116	306916	427716	568516	729316	910116
55	3025	24025	65025	126025	207025	308025	429025	570025	731025	912025
56	3136	24336	65536	126736	207936	309136	430336	571536	732736	913936
57	3249	24649	66049	127449	208849	310249	431649	573049	734449	915849
58	3364	24964	66564	128164	209764	311364	432964	574564	736164	917764
59	3481	25281	67081	128881	210681	312481	434281	576081	737881	919681
60	3600	25600	67600	129600	211600	313600	435600	577600	739600	921600
61	3721	25921	68121	130321	212521	314721	436921	579121	741321	923521
62	3844	26244	68644	131044	213444	315844	438244	580644	743044	925444
63	3969	26569	69169	131769	214369	316969	439569	582169	744769	927369
64	4096	26896	69696	132496	215296	318096	440896	583696	746496	929296
65	4225	27225	70225	133225	216225	319225	442225	585225	748225	931225
66	4356	27556	70756	133956	217156	320356	443556	586756	749956	933156
67	4489	27889	71289	134689	218089	321489	444889	588289	751689	935089
68	4624	28224	71824	135424	219024	322624	446224	589824	753424	937024
69	4761	28561	72361	136161	219961	323761	447561	591361	755161	938961
70	4900	28900	72900	136900	220900	324900	448900	592900	756900	940900
71	5041	29241	73441	137641	221841	326041	450241	594441	758641	942841
72	5184	29584	73984	138384	222784	327184	451584	595984	760384	944784
73	5329	29929	74529	139129	223729	328329	452929	597529	762129	946729
74	5476	30276	75076	139876	224676	329476	454276	599076	763876	948676
75	5625	30625	75625	140625	225625	330625	455625	600625	765625	950625
76	5776	30976	76176	141376	226576	331776	456976	602176	767376	952576
77	5929	31329	76729	142129	227529	332929	458329	603729	769129	954529
78	6084	31684	77284	142884	228484	334084	459684	605284	770884	956484
79	6241	32041	77841	143641	229441	335241	461041	606841	772641	958441
80	6400	32400	78400	144400	230400	336400	462400	608400	774400	960400
81	6561	32761	78961	145161	231361	337561	463761	609961	776161	962361
82	6724	33124	79524	145924	232324	338724	465124	611524	777924	964324
83	6889	33489	80089	146689	233289	339889	466489	613089	779689	966289
84	7056	33856	80656	147456	234256	341056	467856	614656	781456	968256
85	7225	34225	81225	148225	235225	342225	469225	616225	783225	970225
86	7396	34596	81796	148996	236196	343396	470596	617796	784996	972196
87	7569	34969	82369	149769	237169	344569	471969	619369	786769	974169
88	7744	35344	82944	150544	238144	345744	473344	620944	788544	976144
89	7921	35721	83521	151321	239121	346921	474721	622521	790321	978121
90	8100	36100	84100	152100	240100	348100	476100	624100	792100	980100
91	8281	36481	84681	152881	241081	349281	477481	625681	793881	982081
92	8464	36864	85264	153664	242064	350464	478864	627264	795664	984064
93	8649	37249	85849	154449	243049	351649	480249	628849	797449	986049
94	8836	37636	86436	155236	244036	352836	481636	630436	799236	988036
95	9025	38025	87025	156025	245025	354025	483025	632025	801025	980025
96	9216	38416	87616	156816	246016	355216	484416	633616	802816	992016
97	9409	38809	88209	157609	247009	356409	485809	635209	804609	994009
98	9604	39204	88804	158404	248004	357604	487204	636804	806404	996004
99	9801	39601	89401	159201	249001	358801	488601	638401	808201	998001
100	10000	40000	90000	160000	250000	360000	490000	640000	810000	1000000

Tafel der Cubiczahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000.

	0	100	200	300	400
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30956144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649237	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000

Tafel der Cubiczahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000.

	500	600	700	800	900
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	121263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000

Tafel der Cubiczahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000.

	0	100	200	300	400
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53357376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499
100	1000000	8000000	27000000	64000000	125000000

Tafel der Cubiczahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000.

	500	600	700	800	900
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	476910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955971625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999
100	216000000	343000000	512000000	729000000	1000000000

Formeln
zur Berechnung der Kugel-Haufen.

Wenn der Kugel-Haufen ein gleichseitiges Dreyeck zur Grundfläche hat, und voll oder unangerissen ist, so finden wir, wenn die Anzahl der Kugeln in jeder Seite seiner Grundfläche n und die Anzahl der Kugeln des ganzen Haufens S genannt werden

$$S = \frac{n.(n+1).(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$$

Ist hingegen die Grundfläche eines Kugel-Haufens ein ordentliches Viereck oder Quadrat, und es liegen in jeder Seite dieses Viereckes n Kugeln, so findet sich die Summe S aller Kugeln des ganzen Haufens durch

$$S = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3.}$$

Wenn endlich die Grundfläche eines Kugel-Haufens ein längliches Rechteck ist, so kann man bey derselben Länge und Breite unterscheiden. Ist nun die Anzahl der Kugeln in der längern Seite l und in der kürzern b, so wird die Summe S aller Kugeln in dem ganzen Haufen durch folgende Formel gefunden

$$S = \frac{b.(b+1)(3l-(b-1))}{1.\ 2.\ 3.}$$

oder, wenn auch die Anzahl der Kugeln, welche den Rücken des Kugelhaufens bilden, und deren Anzahl immer $l - b + 1$ ist, gezählt und r genannt wird

$$S = \frac{b(b+1)(2l+r)}{1.\ 2.\ 3.}$$

Regeln und Beyspiele zur Anwendung dieser Formeln kommen unten in der Erklärung und dem Gebrauche der Tabellen vor.

Tafel
der Hülfs-Linien
der
Dreyeck-Meßkunst
und
der zustimmenden gewöhnlichen
Logarithmen
für die fünf ersten und letzten Grade
von Minute zu Minute
für den übrigen Theil des Viertheil eines Kreises aber
von 10 zu 10 Minuten
nebst den Unterschieden berechnet.

G	M	Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens	Unterſ.	M	G
0	0	0, 0000000	1, 0000000	0, 0000000	*Infinit.*		60	89
	1	02909	1, 0000000	2909	3437, 7467278		59	
	2	05818	0, 9999998	5818	1718, 8731458	1718, 8735820	58	
	3	0, 0008727	96	0, 0008727	1145, 9153193	572, 9578265	57	
	4	0, 0011636	93	0, 0011636	859, 4362843	286, 4790350	56	
	5	14544	89	14544	687, 5488838	171, 8874005	55	
	6	17453	85	17453	572, 9572022	114, 5916816	54	
	7	20362	79	20362	491, 1060157	81, 8511865	53	
	8	23271	73	23271	429, 7175649	61, 3884508	52	
	9	26180	66	26180	381, 9709889	47, 7465760	51	
0	10	0, 0029089	58	0, 0029089	343, 7737056	38, 1972833	50	89
	11	0, 0031998	49	0, 0031998	312, 5213705	31, 2523351	49	
	12	34907	39	34907	286, 4777352	26, 0436353	48	
	13	37815	28	37816	264, 4407988	22, 0369364	47	
	14	40724	17	40725	245, 5519811	18, 8888177	46	
	15	43633	0, 9999905	43634	229, 1816628	16, 3703183	45	
	16	46542	9, 9999892	46542	214, 8576234	14, 3240394	44	
	17	0, 0049451	878	0, 0049451	202, 2187496	12, 6388738	43	
	18	0, 0052360	863	0, 0052360	190, 9841875	11, 2345621	42	
	19	55268	847	55269	180, 9321991	10, 0519884	41	
0	20	58177	831	58178	171, 8854009	9, 0467982	40	89
	21	61086	0, 9999813	61087	163, 7001907	8, 1852102	39	
	22	63995	0, 9999795	63996	156, 2590839	7, 4411068	38	
	23	66904	776	66905	149, 4650205	6, 7940634	37	
	24	0, 0069813	756	0, 0069814	143, 2371216	6, 2278989	36	
	25	0, 0072721	736	0, 0072723	137, 5074471	5, 7296745	35	
	26	75630	0, 9999714	75632	132, 2185090	5, 2889381	34	
	27	78539	0, 9999692	78541	127, 3213363	4, 8971727	33	
	28	81448	668	81450	122, 7739553	4, 5473810	32	
	29	84357	644	84360	118, 5401802	4, 2337751	31	
0	30	0, 0087265	0, 9999619	0, 0087269	114, 5886501	3, 9515301	30	89
	31	0, 0090174	0, 9999593	0, 0090178	110, 8920520	3, 6965981	29	
	32	93083	567	93087	107, 4264844	3, 4655676	28	
	33	95992	539	95996	104, 1709444	3, 2555400	27	
	34	0, 0098900	0, 9999511	0, 0098905	101, 1069030	3, 0640414	26	
	35	0, 0101809	0, 9999482	0, 0101814	98, 2179428	2, 8889602	25	
	36	104718	0, 9999452	104724	95, 4894753	2, 7284675	24	
	37	107627	421	107633	92, 9084875	2, 5809878	23	
	38	110535	389	110542	90, 4633359	2, 4451516	22	
	39	113444	357	113451	88, 1435715	2, 3197644	21	
0	40	116353	323	116361	85, 9397907	2, 2037808	20	89
	41	0, 0119261	0, 9999289	0, 0119270	83, 8435069	2, 0962838	19	
	42	0, 0122170	254	0, 0122179	81, 8470414	1, 9964655	18	
	43	125079	218	125088	79, 9434300	1, 9036114	17	
	44	127987	181	127998	78, 1263422	1, 8170878	16	
	45	130896	143	130907	76, 3900091	1, 7363331	15	
	46	133805	0, 9999105	133817	74, 7291651	1, 6608440	14	
	47	136713	0, 9999065	136726	73, 1389910	1, 5901741	13	
	48	0, 0139622	0, 9999025	0, 0139635	71, 6150703	1, 5239207	12	
	49	0, 0142530	0, 9998984	0, 0142545	70, 1533461	1, 4617242	11	
0	50	0, 0145439	0, 9998942	0, 0145454	68, 7500875	1, 4032586	10	89
G	M	Coſinus	Sinus	Cotang.	Tangens	Unterſ.	M	G

G	M	Log. Sinus	Log. Cos.	Unt.	Log. Tang.	Unterf.	Log. Cot.	M	G
0	0		10, 0000000				*Infinit.*	60	89
	1	6, 4637261	10, 0000000	0	6, 4637261		13, 5362739	59	
	2	6, 7647565	9, 9999999	1	6, 7647562	3010301	13, 2352438	58	
	3	6, 9408473	98	1	6, 9408475	1760913	13, 0591525	57	
	4	7, 0657860	97	1	7, 0657863	1249388	12, 9342137	56	
	5	1626960	95	2	1626964	969101	8373036	55	
	6	2418771	93	2	2418778	791814	7581222	54	
	7	3088239	91	2	3088248	669470	6911752	53	
	8	3668157	88	3	3668169	579921	6331831	52	
	9	4179681	85	3	4179696	511527	5820304	51	
0	10	7, 4637255	9, 9999982	3	7, 4637273	457577	12, 5362727	50	89
	11	5051181	78	4	5051203	413930	4948797	49	
	12	5429065	74	4	5429091	377888	4570909	48	
	13	5776684	69	5	5776715	347624	4223285	47	
	14	6098530	64	5	6098566	321851	3901434	46	
	15	6398160	59	5	6398201	299635	3601799	45	
	16	6678445	53	6	6678492	280291	3321508	44	
	17	6941733	47	6	6941786	263294	3058214	43	
	18	7189966	40	7	7190026	248240	2809974	42	
	19	7424775	34	6	7424841	234815	2575159	41	
0	20	7647537	9, 9999927	7	7647610	222769	12, 2352390	40	89
	21	7, 7859427	19	8	7, 7859508	211898	12, 2140492	39	
	22	7, 8061458	11	8	7, 8061547	202039	12, 1938453	38	
	23	254507	9, 9999903	8	254604	193057	745396	37	
	24	439338	9, 9999894	9	439444	184840	560556	36	
	25	616623	85	9	616738	177294	383262	35	
	26	786953	76	9	787077	170339	212923	34	
	27	7, 8950854	66	10	7, 8950988	163911	12, 1049012	33	
	28	7, 9108793	56	10	7, 9108938	157950	12, 0891062	32	
	29	261190	45	11	261344	152406	738656	31	
0	30	408419	9, 9999835	10	408584	147240	591416	30	89
	31	550819	23	12	550996	142412	449004	29	
	32	688698	12	11	688886	137890	311114	28	
	33	822334	9, 9999800	12	822534	133648	177466	27	
	34	7, 9951980	9, 9999788	12	7, 9952192	129658	12, 0047808	26	
	35	8, 0077867	75	13	8, 0078092	125900	11, 9921908	25	
	36	200207	62	13	200445	122353	799555	24	
	37	319195	48	14	319446	119001	680554	23	
	38	435009	35	13	435274	115828	564726	22	
	39	547814	21	14	548094	112820	451906	21	
0	40	657763	9, 9999706	15	658057	109963	341943	20	89
	41	764997	9, 9999691	15	765306	107249	234694	19	
	42	869646	76	15	869970	104664	130030	18	
	43	8, 0971832	60	16	8, 0972172	102202	11, 9027828	17	
	44	8, 1071669	44	16	8, 1072025	99853	11, 8927975	16	
	45	169262	28	16	169634	97609	830366	15	
	46	264710	9, 9999611	17	265099	95465	734901	14	
	47	358104	9, 9999594	17	358510	93411	641490	13	
	48	449532	9, 9999577	17	449956	91446	550044	12	
	49	539075	9, 9999559	18	539516	89560	460484	11	
0	50	8, 1626808	9, 9999541	18	8, 1627267	87751	11, 8372733	10	89
G	M	Log. Cos.	Log. Sinus	Unt.	Log. Cot.	Unterf.	Log. Tang.	M	G

G.	M.	Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens	Unterſ.	M.	G.
0	50	0,0145439	0,9998942	0,0145454	68,7500875		10	89
	51	48348	900	48364	67,4018541	1,3482334	9	
	52	51256	856	51273	66,1054729	1,2963812	8	
	53	54165	812	54183	64,8580076	1,2474653	7	
	54	57073	766	57093	63,6567412	1,2012664	6	
	55	59982	720	60002	62,4991536	1,1575876	5	
	56	62890	673	62912	61,3829051	1,1162485	4	
	57	65799	625	65821	60,3058198	1,0770853	3	
	58	68707	577	68731	59,2658721	1,0399477	2	
0	59	71616	527	71641	58,2611735	1,0046986	1	89
1	0	0,0174524	0,9998477	0,0174551	57,2899617	0,9712118	60	88
	1	77432	426	77460	56,3505895	0,9393722	59	
	2	80341	374	80370	55,4415166	0,9090729	58	
	3	83249	321	83280	54,5613003	0,8802163	57	
	4	86158	267	86190	53,7085875	0,8527128	56	
	5	89066	213	89100	52,8821091	0,8264784	55	
	6	91974	157	92010	52,0806726	0,8014365	54	
	7	94883	101	94920	51,3031566	0,7775160	53	
	8	0,0197791	0,9998044	0,0197830	50,5485060	0,7546506	52	
	9	0,0200699	0,9997986	0,0200740	49,8157263	0,7327797	51	
1	10	03608	927	03650	49,1038807	0,7118456	50	88
	11	06516	867	06560	48,4120840	0,6917967	49	
	12	09424	807	09470	47,7395014	0,6725826	48	
	13	12332	745	12380	47,0853430	0,6541584	47	
	14	15241	683	15291	46,4488620	0,6364810	46	
	15	18149	620	18201	45,8293512	0,6195108	45	
	16	21057	556	21111	45,2261407	0,6032105	44	
	17	23965	492	24021	44,6385955	0,5875452	43	
	18	26873	426	26932	44,0661131	0,5724824	42	
	19	29781	360	29842	43,5081217	0,5579914	41	
1	20	0,0232690	0,9997292	0,0232753	42,9640773	0,5440444	40	88
	21	35598	224	35663	42,4334639	0,5306134	39	
	22	38506	156	38574	41,9157899	0,5176740	38	
	23	41414	086	41484	41,4105877	0,5052022	37	
	24	44322	0,9997015	44395	40,9174117	0,4931760	36	
	25	47230	0,9996943	47305	40,4358375	0,4815742	35	
	26	50138	871	50216	39,9654606	0,4703769	34	
	27	53046	798	53127	39,5058945	0,4595661	33	
	28	55954	724	56038	39,0567712	0,4491233	32	
	29	58862	649	58948	38,6177382	0,4390330	31	
1	30	0,0261769	573	0,0261859	38,1884593	0,4292789	30	88
	31	64677	497	64770	37,7686131	0,4198462	29	
	32	67585	419	67681	37,3578917	0,4107214	28	
	33	70493	341	70592	36,9560011	0,4018906	27	
	34	73401	262	73503	36,5626593	0,3933418	26	
	35	76309	182	76414	36,1775963	0,3850630	25	
	36	79216	101	79325	35,8005533	0,3770430	24	
	37	82124	0,9996020	82236	35,4312825	0,3692708	23	
	38	85032	0,9995937	85148	35,0695459	0,3617366	22	
	39	87940	854	88059	34,7151150	0,3544309	21	
1	40	0,0290847	0,9995770	0,0290970	34,3677709	0,3473441	20	88
G.	M.	Coſinus	Sinus	Cotang.	Tangens	Unterſ.	M.	G.

G.	M.	Log. Sin.	Log. Cos.	Unt.	Log.Tang.	Unt.	Log. Cot.	M.	G.
0	50	8, 1626808	9, 9999541		8, 1627267		11, 8372733	10	89
	51	712804	522	19	713282	86015	286718	9	
	52	797129	503	19	797626	84344	202374	8	
	53	879848	484	19	880364	82738	119636	7	
	54	8, 1961020	464	20	8, 1961556	81192	11, 8038444	6	
	55	8, 2040703	444	20	8, 2041259	79703	11, 7958741	5	
	56	118949	424	20	119526	78267	880474	4	
	57	195811	403	21	196408	76882	803592	3	
	58	271335	382	21	271953	75545	728047	2	
0	59	345568	360	22	346208	74255	653792	1	89
1	0	8, 2418553	9, 9999338	22	8, 2419215	73007	11, 7580785	60	88
	1	490332	316	22	491015	71800	508985	59	
	2	560943	294	22	561649	70634	438351	58	
	3	630424	271	23	631153	69504	368847	57	
	4	698810	247	24	699563	68410	300437	56	
	5	766136	224	23	766912	67349	233088	55	
	6	832434	200	24	833234	66322	166766	54	
	7	897734	175	25	898559	65325	101441	53	
	8	8, 2962067	150	25	8, 2962917	64358	11, 7037083	52	
	9	8, 3025460	125	25	8, 3026335	63418	11, 6973665	51	
1	10	087941	100	25	088842	62507	911158	50	88
	11	149536	074	26	150462	61620	849538	49	
	12	210269	047	27	211221	60759	788779	48	
	13	270163	9, 9999021	26	271143	59922	728857	47	
	14	329243	9, 9998994	27	330249	59106	669751	46	
	15	387529	966	28	388563	58314	611437	45	
	16	445043	939	27	446105	57542	553895	44	
	17	501805	911	28	502895	56790	497105	43	
	18	557835	882	29	558953	56058	441047	42	
	19	613150	853	29	614297	55344	385703	41	
1	20	8, 3667769	824	29	8, 3668945	54648	11, 6331055	40	88
	21	721710	794	30	722915	53970	277085	39	
	22	774988	764	30	776223	53308	223777	38	
	23	827620	734	30	828886	52663	171114	37	
	24	879622	703	31	880918	52032	119082	36	
	25	931008	9, 9998672	31	932336	51418	067664	35	
	26	8, 3981793	641	31	8, 3983152	50816	11, 6016848	34	
	27	8, 4031990	609	32	8, 4033381	50229	11, 5966619	33	
	28	081614	577	32	083037	49656	916963	32	
	29	130676	544	33	132132	49095	867868	31	
1	30	179190	512	32	180679	48547	819321	30	88
	31	227168	478	34	228690	48011	771310	29	
	32	274621	445	33	276176	47486	723824	28	
	33	321561	411	34	323150	46974	676850	27	
	34	367999	376	35	369622	46472	630378	26	
	35	413944	342	34	415603	45981	584397	25	
	36	459409	306	36	461103	45500	538897	24	
	37	504402	271	35	506131	45028	493869	23	
	38	548934	235	36	550699	44568	449301	22	
	39	593013	199	36	594814	44115	405186	21	
1	40	8, 4636649	9, 9998162	37	8, 4638486	43672	11, 5361514	20	88
G.	M.	Log. Cos.	Log. Sin.	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang.	M.	G.

G	M	Sinus	Unt.	Cosinus	Unt.	Tangens	Cotang.	Unterſ.	M	G
1	40	0, 0290847		0, 9995770		0, 0290970	34, 3677709		20	88
	41	93755	2908	684	86	93882	34, 0273030	3404679	19	
	42	96662	7	599	5	96793	33, 6935089	3337941	18	
	43	0, 0299570	8	512	7	0, 0299705	33, 3661945	3273144	17	
	44	0, 0302478	8	424	8	0, 0302616	33, 0451727	3210218	16	
	45	05385	7	336	8	05528	32, 7302637	3149090	15	
	46	08293	8	247	89	08439	32, 4212947	3089690	14	
	47	11200	7	157	90	11351	32, 1180988	3031959	13	
	48	14108	8	0, 9995066	1	14263	31, 8205159	2975829	12	
	49	17015	7	0, 9994974	2	17174	31, 5283916	2921243	11	
1	50	0, 0319922	2907	881	3	0, 0320086	31, 2415767	2868149	10	88
	51	22830	8	788	3	22998	30, 9599280	2816487	9	
	52	25737	7	693	5	25910	30, 6833070	2766210	8	
	53	28644	7	598	5	28822	30, 4115802	2717268	7	
	54	31552	8	502	6	31734	30, 1446189	2669613	6	
	55	34459	7	405	7	34646	29, 8822986	2623203	5	
	56	37366	7	308	7	37558	29, 6244995	2577991	4	
	57	40274	8	209	9	40471	29, 3711055	2533940	3	
	58	43181	7	110	99	43383	29, 1220047	2491008	2	
1	59	46088	7	0, 9994009	101	46295	28, 8770889	2449158	1	88
2	0	0, 0348995	7	0, 9993908	1	0, 0349208	28, 6362533	2408356	60	87
	1	51902	7	806	2	52120	28, 3993969	2368564	59	
	2	54809	7	704	2	55033	28, 1664218	2329751	58	
	3	57716	7	600	4	57945	27, 9372333	2291885	57	
	4	60623	7	495	5	60858	27, 7117399	2254934	56	
	5	63530	7	390	5	63771	27, 4898528	2218871	55	
	6	66437	7	284	6	66683	27, 2714861	2183667	54	
	7	69344	7	177	7	69596	27, 0565568	2149293	53	
	8	72251	7	0, 9993069	8	72509	26, 8449842	2115726	52	
	9	75158	7	0, 9992960	9	75422	26, 6366904	2082938	51	
2	10	0, 0378065	2907	851	109	0, 0378335	26, 4315996	2050908	50	87
	11	80971	6	740	111	81248	26, 2296384	2019612	49	
	12	83878	7	629	1	84161	26, 0307358	1989026	48	
	13	86785	7	517	2	87074	25, 8348228	1959130	47	
	14	89692	7	404	3	89988	25, 6418324	1929904	46	
	15	92598	6	290	4	92901	25, 4516996	1901328	45	
	16	95505	7	176	4	95814	25, 2643615	1873381	44	
	17	0, 0398411	6	0, 9992060	6	0, 0398728	25, 0797568	1846047	43	
	18	0, 0401318	7	0, 9991944	6	0, 0401641	24, 8978262	1819306	42	
	19	04224	6	827	7	04555	24, 7185119	1793143	41	
2	20	07131	2907	709	8	07469	24, 5417578	1767541	40	87
	21	10037	6	590	119	10383	24, 3675095	1742483	39	
	22	12944	7	470	120	13296	24, 1957140	1717955	38	
	23	15850	6	350	0	16210	24, 0263199	1693941	37	
	24	18757	7	228	2	19124	23, 8592772	1670427	36	
	25	21663	6	0, 9991106	2	22038	23, 6945372	1647400	35	
	26	24569	6	0, 9990983	3	24952	23, 5320525	1624847	34	
	27	27475	6	859	4	27866	23, 3717772	1602753	33	
	28	30382	7	734	5	30781	23, 2136665	1581107	32	
	29	33288	6	609	5	33695	23, 0576767	1559898	31	
2	30	0, 0436194	2906	0, 9990482	127	0, 0436609	22, 9037655	1539112	30	87
G	M	Coſinus	Unt.	Sinus	Unt.	Cotang.	Tangens	Unterſ.	M	G

G	M	Log. Sin.	Unt.	Log. Cos.	Unt.	Log.Tang.	Unt.	Log. Cot.	M	G
1	40	8,4636649		9,9998162		8,4638486		11,5361514	20	88
	41	679850	43201	125	37	681725	43239	318275	19	
	42	722626	2776	088	37	724538	2813	275462	18	
	43	764984	2358	050	38	766933	2395	233067	17	
	44	806932	1948	9,9998012	38	808920	1987	191080	16	
	45	848479	1547	9,9997974	38	850505	1585	149495	15	
	46	889632	1153	935	39	891696	1191	108304	14	
	47	930398	0766	896	39	932502	0806	067498	13	
	48	8,4970784	0386	856	40	8,4972928	0426	11,5027072	12	
	49	8,5010798	40014	817	39	8,5012982	40054	11,4987018	11	
1	50	050447	39649	776	41	052671	39689	947329	10	88
	51	089736	9289	736	40	092001	9330	907999	9	
	52	128673	8937	695	41	130978	8977	869022	8	
	53	167264	8591	653	42	169610	8632	830390	7	
	54	205514	8250	612	41	207902	8292	792098	6	
	55	243430	7916	570	42	245860	7958	754140	5	
	56	281017	7587	527	43	283490	7630	716510	4	
	57	318281	7264	484	43	320797	7307	679203	3	
	58	355228	6947	441	43	357787	6990	642213	2	
1	59	391863	6635	398	43	394466	6679	605534	1	88
2	0	8,5428192	36329	9,9997354	44	8,5430838	36372	11,4569162	60	87
	1	464218	6026	309	45	466909	6071	533091	59	
	2	499948	5730	265	44	502683	5774	497317	58	
	3	535386	5438	220	45	538166	5483	461834	57	
	4	570536	5150	174	46	573362	5196	426638	56	
	5	605404	4868	128	46	608276	4914	391724	55	
	6	639994	4590	082	46	642912	4636	357088	54	
	7	674310	4316	9,9997036	46	677275	4363	322725	53	
	8	708357	4047	9,9996989	47	711368	4093	288632	52	
	9	742139	3782	942	47	745197	3829	254803	51	
2	10	8,5775660	33521	894	48	8,5778766	33569	11,4221234	50	87
	11	808923	3263	846	48	812077	3311	187923	49	
	12	841933	3010	798	48	845136	3059	154864	48	
	13	874694	2761	749	49	877945	2809	122055	47	
	14	907209	2515	700	49	910509	2564	089491	46	
	15	939483	2274	650	50	942832	2323	057168	45	
	16	8,5971517	2034	601	49	8,5974917	2085	11,4025083	44	
	17	8,6003317	1800	550	51	8,6006767	1850	11,3993233	43	
	18	034886	1569	500	50	038386	1619	961614	42	
	19	066226	1340	449	51	069777	1391	930223	41	
2	20	097341	1115	9,9996398	51	100943	1166	899057	40	87
	21	128235	0894	346	52	131889	0946	868111	39	
	22	158910	0675	294	52	162616	0727	837384	38	
	23	189369	0459	242	52	193127	0511	806873	37	
	24	219616	0247	189	53	223427	0300	776573	36	
	25	249653	30037	136	53	253518	30091	746482	35	
	26	279484	29831	082	54	283402	29884	716598	34	
	27	309111	9627	9,9996028	54	313083	9681	686917	33	
	28	338537	9426	9,9995974	54	342563	9480	657437	32	
	29	367764	9227	9,9995919	55	371845	9282	628155	31	
2	30	8,6396796	29032	9,9995865	54	8,6400931	29086	11,3599069	30	87
G	M	Log. Cos.	Unt.	Log. Sin.	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log.Tang.	M	G

G	M	Sinus	Unt.	Cosinus	Unt.	Tangens	Cotang.	Unterf.	M	G
2	30	0,0436194		0,9990482		0,0436609	22,9037655		30	87
	31	39100	2906	355	127	39524	7518916	1518739	29	
	32	42006	6	227	8	42438	6020148	1498768	28	
	33	44912	6	0,9990098	129	45353	4540959	1479189	27	
	34	47818	6	0,9989968	130	48268	3080967	1459992	26	
	35	50724	6	837	1	51183	1639802	1441165	25	
	36	53630	6	706	1	54097	22,0217100	1422702	24	
	37	56536	6	573	3	57012	21,8812510	1404590	23	
	38	59442	6	440	3	59927	7425687	1386823	22	
	39	62347	5	306	4	62842	6056296	1369391	21	
2	40	0,0465253	2906	171	5	0,0465757	4704010	1352286	20	87
	41	68159	6	0,9989035	6	68673	3368511	1335499	19	
	42	71065	6	0,9988899	6	71588	2049488	1319023	18	
	43	73970	5	761	8	74503	21,0746637	1302851	17	
	44	76876	6	623	8	77419	20,9459662	1286975	16	
	45	79781	5	484	139	80334	8188276	1271386	15	
	46	82687	6	344	140	83250	6932196	1256080	14	
	47	85592	5	203	1	86166	5691147	1241049	13	
	48	88498	6	0,9988061	2	89082	4464861	1226286	12	
	49	91403	5	0,9987919	2	91997	3253075	1211786	11	
2	50	94308	2905	775	4	94913	2055535	1197540	10	87
	51	0,0497214	6	931	4	0,0497829	20,0871989	1183546	9	
	52	0,0500119	5	486	5	0,0500746	19,9702194	1169795	8	
	53	03024	5	340	6	03662	8545913	1156281	7	
	54	05929	5	194	6	06578	7402909	1143004	6	
	55	08835	6	0,9987046	8	09495	6272959	1129950	5	
	56	11740	5	0,9986898	148	12411	5155837	1117122	4	
	57	14645	5	748	150	15328	4051327	1104510	3	
	58	17550	5	598	0	18244	2959217	1092110	2	
2	59	20455	5	447	1	21161	1879297	1079920	1	87
3	0	0,0523360	2905	295	2	0,0524078	19,0811367	1067930	60	86
	1	26264	4	0,9986143	2	26995	18,9755226	1056141	59	
	2	29169	5	0,9985989	4	29912	8710680	1044546	58	
	3	32074	5	835	4	32829	7677539	1033141	57	
	4	34979	5	680	5	35746	6655618	1021921	56	
	5	37883	4	524	6	38663	5644734	1010884	55	
	6	40788	5	367	7	41581	4644709	1000025	54	
	7	43693	5	209	8	44498	3655370	989339	53	
	8	46597	4	0. 9985050	9	47416	2676544	978826	52	
	9	49502	5	0,9984891	159	50333	1708067	968477	51	
3	10	0,0552406	2904	731	160	0,0553251	18,0749774	958293	50	86
	11	55311	5	570	1	56169	17,9801505	948269	49	
	12	58215	4	408	2	59087	8863104	938401	48	
	13	61119	4	245	3	62005	7934417	928687	47	
	14	64024	5	0,9984081	4	64923	7015294	919123	46	
	15	66928	4	0,9983917	4	67841	6105588	909706	45	
	16	69832	4	751	6	70759	5205155	900433	44	
	17	72736	4	585	6	73678	4313854	891301	43	
	18	75640	4	418	7	76596	3431546	882308	42	
	19	78544	4	250	8	79515	2558095	873451	41	
3	20	0,0581448	2904	0,9983082	168	0,0582434	17,1693369	864726	40	86
G	M	Cosinus	Unt.	Sinus	Unt.	Cotang.	Tang.	Unterf.	M	G

G	M	Log. Sin.	Unt.	Log. Cos.	Unt.	L. Tang.	Unt.	Log. Cot.	M	G
2	30	8, 6396796		9, 9995865		8, 6400931		11, 3599069	30	87
	31	425634	28838	809	56	429825	28894	570175	29	
	32	454282	648	753	56	458528	703	541472	28	
	33	482742	460	697	56	487044	516	512956	27	
	34	511016	274	641	56	515375	331	484625	26	
	35	539107	28091	584	57	543522	28147	456478	25	
	36	567017	27910	527	57	571490	27968	428510	24	
	37	594748	731	469	58	599279	789	400721	23	
	38	622303	555	411	58	626891	612	373109	22	
	39	649684	381	353	58	654331	440	345669	21	
2	40	8, 6676893	209	295	58	8, 6681598	267	11, 3318402	20	87
	41	703932	27039	236	59	708697	27099	291303	19	
	42	730804	26872	176	60	735628	26931	264372	18	
	43	757510	706	116	60	762393	765	237607	17	
	44	784052	542	9, 9995056	60	788996	603	211004	16	
	45	810433	381	9, 9994996	60	815437	441	184563	15	
	46	836654	221	935	61	841719	282	158281	14	
	47	862718	26064	874	61	867844	26125	132156	13	
	48	888625	25907	812	62	893813	25969	106187	12	
	49	914379	754	750	62	919629	816	080371	11	
2	50	939980	601	688	62	945292	663	054708	10	87
	51	965431	451	625	63	970806	514	029194	9	
	52	8, 6990734	303	562	63	8, 6996172	366	11, 3003828	8	
	53	8, 7015889	155	498	64	8, 7021390	218	11, 2978610	7	
	54	040899	25010	435	63	046465	25075	953535	6	
	55	065766	24867	370	65	071395	24930	928605	5	
	56	090490	724	306	64	096185	790	903815	4	
	57	115075	585	241	65	120834	649	879166	3	
	58	139520	445	176	65	145345	511	854655	2	
2	59	163829	309	110	66	169719	374	830281	1	87
3	0	8, 7188002	173	9, 9994044	66	8, 7193958	239	11, 2806042	60	86
	1	212040	24038	9, 9993978	66	218063	24105	781937	59	
	2	235946	23906	911	67	242035	23972	757965	58	
	3	259721	775	844	67	265877	842	734123	57	
	4	283366	645	776	68	289589	712	710411	56	
	5	306882	516	708	68	313174	585	686826	55	
	6	330272	390	640	68	336631	457	663369	54	
	7	353535	263	572	68	359964	333	640036	53	
	8	376675	140	503	69	383172	208	616828	52	
	9	399691	23016	433	70	406258	23086	593742	51	
3	10	8, 7422586	22895	364	69	8, 7429222	22964	11, 2570778	50	86
	11	445360	774	293	71	452067	845	547933	49	
	12	468015	655	223	70	474792	725	525208	48	
	13	490553	538	152	71	497400	608	502600	47	
	14	512973	420	081	71	519892	492	480108	46	
	15	535278	305	9, 9993009	72	542269	377	457731	45	
	16	557469	191	9, 9992938	71	564531	262	435469	44	
	17	579546	22077	865	73	586681	150	413319	43	
	18	601512	21966	793	72	608719	22038	391281	42	
	19	623366	854	720	73	630647	21928	369353	41	
3	20	8, 7645111	21745	9, 9992646	74	8, 7652465	21818	11, 2347535	40	86
G	M	Log. Cos.	Unt.	Log. Sin.	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang.	M	G

G	M	Sinus	Unt	Cosinus	U.	Tangens	Unt	Cotang.	Unt.	M	G
3	20	0, 0581448		0, 9983082		0, 0582434		17, 1693369		40	86
	21	84352	2904	0, 9982912	170	85352	2918	17, 0837238	856131	39	
	22	87256	4	742	0	88271	19	16, 9989574	47664	38	
	23	90160	4	570	2	91190	19	9150251	39323	37	
	24	93064	4	398	2	94109	19	8319148	31103	36	
	25	95967	3	225	3	97029	20	7496144	23004	35	
	26	0, 0598871	4	0, 9982052	3	0, 0599948	19	6681120	15024	34	
	27	0, 0601775	4	0, 9981877	5	0, 0602867	19	5873962	807158	33	
	28	04678	3	701	6	05787	20	5074555	799407	32	
	29	07582	4	525	6	08706	19	4282789	91766	31	
3	30	10485	2903	348	7	11626	2920	3498555	84234	30	86
	31	13389	4	0, 9981170	8	14546	0	2721744	76811	29	
	32	16292	3	0, 9980991	179	17466	0	1952254	69490	28	
	33	19196	4	811	180	20386	0	1189979	62275	27	
	34	22099	3	631	0	23306	0	16, 0434819	55160	26	
	35	25002	3	450	1	26226	0	15, 9686674	48145	25	
	36	27905	3	267	3	29147	1	8945449	41225	24	
	37	30808	3	0, 9980084	3	32067	0	8211045	34404	23	
	38	33711	3	900	4	34988	1	7483371	27674	22	
	39	36614	3	716	4	37908	0	6762333	21038	21	
3	40	0, 0639517	2903	530	6	0, 0640829	2921	6047841	14492	20	86
	41	42420	3	343	7	43750	1	5339806	08035	19	
	42	45323	3	0, 9979156	7	46671	1	4638141	701665	18	
	43	48226	3	0, 9978968	8	49592	1	3942760	695381	17	
	44	51129	3	779	189	52513	1	3253580	89180	16	
	45	54031	2	589	190	55435	2	2570517	83063	15	
	46	56934	3	399	0	58356	1	1893490	77027	14	
	47	59836	2	207	2	61278	2	1222420	71070	13	
	48	62739	3	0, 9978015	2	64199	1	15, 0557227	65193	12	
	49	65641	2	0, 9977821	4	67121	2	14, 9897836	59391	11	
3	50	0, 0668544	2903	627	4	0, 0670043	2922	9244170	53666	10	86
	51	71446	2	433	4	72965	2	8596155	48015	9	
	52	74349	3	237	6	75887	2	7953718	42437	8	
	53	77251	2	0, 9977040	7	78809	2	7316787	36931	7	
	54	80153	2	0, 9976843	7	81732	3	6685292	31495	6	
	55	83055	2	645	198	84654	2	6059163	26129	5	
	56	85957	2	445	200	87577	3	5438332	20831	4	
	57	88859	2	245	0	90499	2	4822732	15600	3	
	58	91761	2	0, 9976045	0	93422	3	4212297	10435	2	
3	59	94663	2	0, 9975843	2	96345	3	3606961	05336	1	86
4	0	0, 0697565	2902	641	2	0, 0699268	2923	3006663	600298	60	85
	1	0, 0700467	2	437	4	0, 0702191	3	2411337	595326	59	
	2	03368	1	233	4	05115	4	1820924	90413	58	
	3	06270	2	0, 9975028	5	08038	3	1235363	85561	57	
	4	09171	1	0, 9974822	6	10961	3	0654593	80770	56	
	5	12073	2	615	7	13885	4	14, 0078556	76037	55	
	6	14974	1	408	7	16809	4	13, 9507194	71362	54	
	7	17876	2	0, 9974199	9	19733	4	8940451	66743	53	
	8	20777	1	0, 9973990	209	22657	4	8378270	62181	52	
	9	23678	1	0, 9973780	210	25581	4	7820598	57672	51	
4	10	0, 0726580	2902	0, 9973569	211	0, 0728505	2924	13, 7267379	553219	50	85
G	M	Cosinus	Unt	Sinus	U.	Cotang.	Unt	Tangens	Unt.	M	G

G	M	Log. Sin.	Unt.	Log. Cos.	Unt.	Log. Tang.	Unt.	Log. Cot.	M	G
3	20	8,7645111		9,9992646		8,7652465		11,2347535	40	86
	21	66747	21636	572	74	74175	21710	25825	39	
	22	8,7688275	528	498	74	8,7695777	602	11,2304223	38	
	23	8,7709697	422	424	74	8,7717274	497	11,2282726	37	
	24	31014	317	349	75	38665	391	61335	36	
	25	52226	212	274	75	59952	287	40048	35	
	26	73334	108	198	76	8,7781136	184	11,2218864	34	
	27	8,7794340	21006	122	76	8,7802218	21082	11,2197782	33	
	28	8,7815244	20904	9,9992046	76	23199	20981	76801	32	
	29	36048	804	9,9991969	77	44079	880	55921	31	
3	30	56753	705	892	77	64861	782	35139	30	86
	31	77359	606	815	77	85544	683	14456	29	
	32	8,7897867	508	737	78	8,7806130	586	11,2193870	28	
	33	8,7918278	411	659	78	8,7926620	490	11,2073380	27	
	34	38594	316	580	79	47014	394	52986	26	
	35	58814	220	501	79	67313	299	32687	25	
	36	78941	127	422	79	8,7987519	206	11,2012481	24	
	37	8,7998974	20033	342	80	8,8007632	113	11,1992368	23	
	38	8,8018915	19941	262	80	27653	20021	72347	22	
	39	38764	849	182	80	47583	19930	52417	21	
3	40	58523	759	101	81	67422	839	32578	20	86
	41	78192	669	9,9991020	81	8,8087172	750	11,1912828	19	
	42	8,8097772	580	9,9990938	82	8,8106834	662	11,1893166	18	
	43	8,8117264	492	856	82	26407	573	73593	17	
	44	36668	404	774	82	45894	487	54106	16	
	45	55985	317	691	83	65294	400	34706	15	
	46	75217	232	608	83	8,8184608	314	11,1815392	14	
	47	8,8194363	146	525	83	8,8203838	230	11,1796162	13	
	48	8,8213425	19062	441	84	22984	146	77016	12	
	49	32404	18979	357	84	42046	19062	57954	11	
3	50	51299	895	273	84	61026	18980	38974	10	86
	51	70112	813	188	85	79924	898	20076	9	
	52	8,8288844	732	103	85	8,8298741	817	11,1701259	8	
	53	8,8307495	651	9,9990017	86	8,8317478	737	11,1682522	7	
	54	26066	571	9,9989931	86	36134	656	63866	6	
	55	44557	491	845	86	54712	578	45288	5	
	56	62969	412	758	87	73211	499	26789	4	
	57	81304	335	671	87	8,8391633	422	11,1608367	3	
	58	8,8399561	257	584	87	8,8409977	344	11,1590023	2	
3	59	8,8417741	180	496	88	28245	268	71755	1	86
4	0	35845	104	408	88	46437	192	53563	60	85
	1	53874	18029	319	89	64554	117	35446	59	
	2	71827	17953	230	89	8,8482597	18043	11,1517403	58	
	3	8,8489707	880	141	89	8,8500566	17969	11,1499434	57	
	4	8,8507512	805	9,9989052	89	18461	895	81539	56	
	5	25245	733	9,9988962	90	36283	822	63717	55	
	6	42905	660	871	91	54034	751	45966	54	
	7	60493	588	780	91	71713	679	28287	53	
	8	78010	517	689	91	8,8589321	608	11,1410679	52	
	9	8,8595457	447	598	91	8,8606859	538	11,1393141	51	
4	10	8,8612833	17376	9,9988506	92	8,8624327	17468	11,1375673	50	85
G	M	Log. Cos.	Unt.	Log. Sin.	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang.	M	G

G	M	Sinus	U	Cosinus	U.	Tangens	U.	Cotang.	Unt.	M	G
4	10	0,0726580		0,9973569		0,0728505		13,7267379		50	85
	11	29481	2901	3357	212	31430	2925	6718560	548819	49	
	12	32382	01	3144	3	34354	4	6174089	44471	48	
	13	35283	01	2931	3	37279	5	5633915	40174	47	
	14	38184	01	2717	4	40203	4	5097986	35929	46	
	15	41085	01	2502	5	43128	5	4566253	31733	45	
	16	43986	01	2286	6	46053	5	4038667	27586	44	
	17	46887	01	2069	7	48979	6	3515179	23488	43	
	18	49787	00	1851	8	51904	5	2995741	19438	42	
	19	52688	01	1632	9	54829	5	2480307	15434	41	
4	20	0,0755589	2901	0,9971413	219	0,0757755	6	1968830	11477	40	85
	21	58489	00	1193	220	60680	5	1461266	07564	39	
	22	61390	01	0972	1	63606	6	0957568	503698	38	
	23	64290	00	0750	2	66532	6	13,0457693	499875	37	
	24	67190	00	0527	3	69458	6	12,9961598	96095	36	
	25	70091	01	0303	4	72384	6	9469240	92358	35	
	26	72991	00	0,9970079	4	75311	7	8980577	88663	34	
	27	75891	00	0,9969854	5	78237	6	8495566	85011	33	
	28	78791	00	9628	6	81164	7	8014168	81398	32	
	29	81691	00	9401	7	84090	6	7536341	77827	31	
4	30	0,0784591	2900	9173	8	0,0787017	7	7062047	74294	30	85
	31	87491	00	8944	9	89944	7	6591246	70801	29	
	32	90391	2900	8715	229	92871	7	6123900	67346	28	
	33	93290	2899	8485	230	95798	7	5659971	63929	27	
	34	96190	2900	8254	1	0,0798726	8	5199420	60551	26	
	35	0,0799090	2900	8022	2	0,0801653	7	4742212	57208	25	
	36	0,0801989	2899	7789	3	04581	8	4288310	53902	24	
	37	04889	2900	7555	4	07509	8	3837679	50631	23	
	38	07788	2899	7320	5	10437	8	3390282	47397	22	
	39	10687	2899	3085	5	13365	8	2946085	44197	21	
4	40	13587	2900	0,9966849	6	16293	8	12,2505055	441030	20	85
	41	16486	2899	6612	7	19221	8	2067156	37899	19	
	42	19385	99	6374	8	22150	9	1632356	34800	18	
	43	22284	99	6135	239	25078	8	1200622	31734	17	
	44	25183	99	5895	240	28007	9	0771922	28700	16	
	45	28082	99	5655	0	30936	9	12,0346223	25699	15	
	46	30981	99	5414	1	33865	9	11,9923495	22728	14	
	47	33880	99	5172	2	36794	9	9503705	19790	13	
	48	36778	98	4929	3	39723	2929	9086824	16881	12	
	49	39677	99	4685	4	42653	2930	8672821	14003	11	
4	50	0,0842576	2899	0,9964440	5	0,0845583	2930	8261667	11154	10	85
	51	45474	98	4194	6	48512	2929	7853331	08336	9	
	52	48373	99	3948	6	51442	2930	7447786	05545	8	
	53	51271	98	3701	7	54372	0	7045003	02783	7	
	54	54169	98	3453	8	57302	0	6644953	400050	6	
	55	57067	98	3204	249	60233	1	6247608	397345	5	
	56	59966	99	2954	250	63163	0	5852942	94666	4	
	57	62864	98	2703	1	66094	1	5460927	92015	3	
	58	65762	98	2452	1	69025	1	5071536	89391	2	
	59	68660	98	2200	2	71956	1	4684743	86793	1	
4	60	0,0871557	2897	0,9961947	253	0,0874887	2931	11,4300523	384220	0	85
G	M	Cosinus	U.	Sinus	U.	Cotang.	U.	Tangens	Unt.	M	G

G	M	Log. Sin.	Unt.	Log. Cof.	Unt.	Log. Tang.	Unt.	Log. Cot	M	G
4	10	8,8612833		9,9988506		8,8624327		11,1375673	50	85
	11	30139	17306	414	92	41725	17398	58275	49	
	12	47376	237	321	93	59055	330	40945	48	
	13	64545	169	228	93	76317	262	23683	47	
	14	81646	101	135	93	8,8693511	194	11,1306489	46	
	15	8,8698680	17034	9,9988041	94	8,8710638	127	11,1289362	45	
	16	8,8715646	16966	9,9987947	94	27699	17061	72301	44	
	17	32546	900	853	94	44694	16995	55306	43	
	18	49381	835	758	95	61623	929	38377	42	
	19	66150	769	663	95	78487	864	21513	41	
4	20	82854	704	567	96	8,8795286	799	11,1204714	40	85
	21	8,8799493	639	471	96	8,8812022	736	11,1187978	39	
	22	8,8816069	576	375	96	28694	672	71306	38	
	23	32581	512	278	97	45303	609	54697	37	
	24	49031	450	181	97	61850	547	38150	36	
	25	65418	387	9,9987084	97	78334	484	21666	35	
	26	81743	325	9,9986986	98	8,8894757	423	11,1105243	34	
	27	8,8898007	264	888	98	8,8911119	362	11,1088881	33	
	28	8,8914209	202	790	98	27420	301	72580	32	
	29	30351	142	691	99	43660	240	56340	31	
4	30	46433	082	591	100	59842	182	40158	30	85
	31	62455	16022	492	99	75963	121	24037	29	
	32	78418	15963	392	100	8,8992026	063	11,1007974	28	
	33	8,8994322	904	292	100	8,9008030	16004	11,0991970	27	
	34	8,9010168	846	191	1	23977	15947	76023	26	
	35	25955	787	9,9986090	1	39866	889	60134	25	
	36	41685	730	9,9985988	2	55697	831	44303	24	
	37	57358	673	886	2	71472	775	28528	23	
	38	72975	617	784	2	8,9087190	718	11,0912810	22	
	39	8,9088535	560	682	2	8,9102853	663	11,0897147	21	
4	40	8,9104039	504	579	3	18460	607	81540	20	85
	41	19487	448	475	4	34012	552	65988	19	
	42	34881	394	372	3	49509	497	50491	18	
	43	50219	338	268	4	64952	443	35048	17	
	44	65504	285	163	5	80340	388	19660	16	
	45	80734	230	9,9985058	5	8,9195675	335	11,0804325	15	
	46	8,9195911	177	9,9984953	5	8,9210957	282	11,0789043	14	
	47	8,9211034	123	848	5	26186	229	73814	13	
	48	26105	071	742	6	41363	177	58637	12	
	49	41123	15018	636	6	56487	124	43513	11	
4	50	56089	14966	529	7	71560	073	28440	10	85
	51	71003	914	422	7	8,9286581	15021	11,0713419	9	
	52	8,9285866	863	315	7	8,9301552	14971	11,0698448	8	
	53	8,9300678	812	207	8	16471	919	83529	7	
	54	15439	761	9,9984099	8	31340	869	68660	6	
	55	30150	711	9,9983990	9	46160	820	53840	5	
	56	44811	661	881	9	60929	769	39071	4	
	57	59422	611	772	9	75650	721	24350	3	
	58	73983	561	663	109	8,9390321	671	11,0609679	2	
	59	8,9388496	513	553	110	8,9404944	623	11,0595056	1	
4	60	8,9402960	14464	9,9983442	111	8,9419518	14574	11,0580482	0	85
G	M	Log. Cof.	Unt.	Log. Sinus	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang.	M	G

G	M	Sinus	Unt.	Cosin.	U.	Tang.	Unt.	Cotang.	Unterſ.	M	G
5	0	0871557	0,	9961947	0,	0874887	0,	11,4300523		0	85
	10	900532	28975	59369	2578	904206	29319	11,0594310	3706213	50	
	20	929499	967	56708	661	933540	334	10,7119126	475184	40	
	30	958458	959	53962	746	962890	350	10,3853971	265155	30	
	40	0987408	950	51132	830	0992257	367	10,0780311	3073660	20	
	50	1016351	943	48217	915	1021641	384	9,7881732	2898579	10	
6	0	045285	28934	9945218	2999	051042	29401	9,5143645	738087	0	84
	10	074210	925	42136	3082	080462	420	9,2553035	590610	50	
	20	103126	916	38969	167	109899	437	9,0098261	454774	40	
	30	132032	906	35718	251	139356	457	8,7768874	329387	30	
	40	160929	897	32383	335	168831	475	8,5555468	213406	20	
	50	189816	887	28964	419	198328	497	8,3449557	105911	10	
7	0	1218693	28877	9925462	502	1227846	29518	8,1443464	2006093	0	83
	10	247560	867	21874	588	257384	538	7,9530224	1913240	50	
	20	276416	856	18203	671	286943	559	7,7703506	826718	40	
	30	305262	846	14449	754	316525	582	7,5957541	745965	30	
	40	334096	834	10609	840	346129	604	7,4287064	670477	20	
	50	362919	823	06687	3922	375757	628	7,2687255	599809	10	
8	0	1391731	28812	9902680	4007	1405408	29651	7,1153697	533558	0	82
	10	420531	800	9898590	090	435084	676	6,9682335	471362	50	
	20	449319	788	94416	174	464784	700	6,8269437	412898	40	
	30	478094	775	90158	258	494510	726	6,6911562	357875	30	
	40	506857	763	85817	341	524261	751	6,5605538	306024	20	
	50	535607	750	81392	425	554040	779	6,4348428	257110	10	
9	0	1564345	28738	76883	509	1583844	29804	6,3137515	210913	0	81
	10	593069	724	72291	592	613677	833	6,1970279	167236	50	
	20	621779	710	67615	676	643537	860	6,0844381	125898	40	
	30	650476	697	62856	759	673426	889	5,9757644	086737	30	
	40	679159	683	58013	843	703344	918	5,8708042	049602	20	
	50	707828	669	53087	4926	733292	948	5,7693688	1014354	10	
10	0	1736482	28654	9848077	5010	1763270	29978	5,6712818	0980870	0	80
	10	765121	639	42985	092	793278	30008	5,5763786	949032	50	
	20	793746	625	37808	177	823318	040	5,4845052	918734	40	
	30	822355	609	32549	259	853390	072	5,3955172	889880	30	
	40	850949	594	27206	343	883495	105	5,3092793	862379	20	
	50	879527	578	21781	425	913632	137	5,2256647	836146	10	
11	0	908090	28563	16271	510	943803	30171	5,1445540	811107	0	79
	10	936636	546	10680	591	1974008	205	5,0658352	787188	50	
	20	965166	530	9805005	675	2004248	240	4,9894027	764325	40	
	30	1993679	513	9799247	758	034523	275	4,9151570	742457	30	
	40	2022176	497	93406	841	064834	311	4,8430045	721525	20	
	50	050655	479	87483	5923	095181	347	4,7728567	701478	10	
12	0	079117	28462	81476	6007	125565	30384	4,7046301	682266	0	78
	10	107561	444	75386	090	155988	423	4,6382457	663844	50	
	20	135988	427	69215	171	186448	460	4,5736287	646170	40	
	30	164396	408	62960	255	216947	499	4,5107085	629202	30	
	40	192786	390	56623	337	247485	538	4,4494181	612904	20	
	50	221158	372	50203	420	278063	578	4,3896940	597241	10	
12	60	2249511	28353	9743701	6502	2308682	30619	4,3314759	0582181	0	77
G	M	Coſin.	Unt.	Sinus	U.	Cotang	Unt.	Tangens	Unterſ.	M	G

G	M	Log. Sin.	Unt.	Log. Coſ.	U.	Log. Tang.	Unt.	Log. Cot.	M	G
5	0	8,9402960		9,9983442		8,9419518		11,0580482	0	85
	10	544991	142031	9,9982318	1124	562672	143154	437328	50	
	20	682487	37496	9,9981158	160	701330	38658	298670	40	
	30	815729	33242	9,9979960	198	835769	34439	164231	30	
	40	8,9944968	29239	8725	235	8,9966243	30474	11,0033757	20	
	50	9,0070436	25468	7453	272	9,0092984	26741	10,9907016	10	
6	0	192346	21910	6143	1310	216202	23218	783798	0	84
	10	310890	18544	4797	346	336093	19891	663907	50	
	20	426249	15359	3414	383	452836	16743	547164	40	
	30	538588	12339	1993	421	566595	13759	433405	30	
	40	648057	09469	9,9970535	458	677522	10927	322478	20	
	50	754799	06742	9,9969040	495	785760	08238	214240	10	
7	0	858945	04146	7507	1533	891438	05678	108562	0	83
	10	9,0960615	101670	5937	570	9,0994678	03240	10,9005322	50	
	20	9,1059924	99309	4330	607	9,1095594	100916	10,8904406	40	
	30	156977	7053	2686	644	194291	98697	805709	30	
	40	251872	4895	9,9961004	682	290868	6577	709132	20	
	50	344702	2830	9,9959284	720	385417	4549	614583	10	
8	0	435553	90851	7528	1756	478025	2608	521975	0	82
	10	524507	88954	5734	794	568773	90748	431227	50	
	20	611639	7132	3902	832	657737	88964	342263	40	
	30	697021	5382	2033	869	744988	7251	255012	30	
	40	780721	3700	9,9950126	907	830595	5607	169405	20	
	50	862802	2081	9,9948181	945	914621	4026	085379	10	
9	0	9,1943324	80522	6199	1982	9,1997125	2504	10,8002875	0	81
	10	9,2022345	79021	4179	2020	9,2078165	81040	10,7921835	50	
	20	099917	7572	2122	057	157795	79630	842205	40	
	30	176092	6175	9,9940027	095	236065	8270	763935	30	
	40	250918	4826	9,9937894	133	313024	6959	686976	20	
	50	324440	3522	5723	171	388717	5693	611283	10	
10	0	396702	2262	3515	2208	463188	4471	536812	0	80
	10	467746	71044	9,9931268	247	536477	3289	463523	50	
	20	537609	69863	9,9928984	284	608625	2148	391375	40	
	30	606330	8721	6661	323	679669	71044	320331	30	
	40	673945	7615	4301	360	749644	69975	250356	20	
	50	740487	6542	9,9921902	399	818585	8941	181415	10	
11	0	805988	5501	9,9919466	2436	886523	7938	113477	0	79
	10	870480	4492	6991	475	9,2953489	6966	10,7046511	50	
	20	933993	3513	4478	513	9,3019514	6025	10,6980486	40	
	30	9,2996553	2560	9,9911927	551	084626	5112	915374	30	
	40	9,3058189	1636	9,9909338	589	148851	4225	851149	20	
	50	118926	60737	6710	628	212216	3365	787784	10	
12	0	178789	59863	4044	2666	274745	2529	725255	0	78
	10	237802	9013	9,9901339	705	336463	1718	663537	50	
	20	295988	8186	9,9898597	742	397391	0928	602609	40	
	30	353368	7380	5815	782	457552	60161	542448	30	
	40	409963	6595	2995	820	516968	59416	483032	20	
	50	465794	5831	9,9890137	858	575658	58690	424342	10	
12	60	9,3520880	55086	9,9887239	2898	9,3633641	57983	10,6366359	0	77
G	M	Log. Coſ.	Unt.	Log. Sin.	U.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang.	M	G

G	M	Sinus	Unt.	Cosin.	Unt.	Tangens	Unt.	Cotang.	Unt.	M	G
13	0	2249511	0,	9743701	0,	0, 2308682		4, 3314759		0	77
	10	277844	28333	37116	6585	339342	30660	2747066	567693	50	
	20	306159	315	30448	668	370044	702	2193318	53748	40	
	30	334454	295	23699	749	400787	743	1652998	40320	30	
	40	362729	275	16867	832	431575	788	1125614	27384	20	
	50	390984	255	09954	913	462405	830	0610700	14914	10	
14	0	2419219	28235	9702957	6997	0, 2493280	875	4, 0107809	502891	0	76
	10	447433	214	9695879	7078	524200	920	3, 9616518	491291	50	
	20	475627	194	88718	161	555165	30965	9136420	80098	40	
	30	503800	173	81476	242	586176	31011	8667131	69289	30	
	40	531952	152	74152	324	617234	058	8208281	58850	20	
	50	560082	130	66746	406	648339	105	7759519	48762	10	
15	0	2588190	28108	59258	488	0, 2679492	153	7320508	39011	0	75
	10	616277	087	51688	570	710693	201	6890927	29581	50	
	20	644342	065	44037	651	741944	251	6470467	20460	40	
	30	672384	042	36305	732	773245	301	6058835	11632	30	
	40	700403	28019	28490	815	804597	352	5655749	403086	20	
	50	728400	27997	20594	896	835999	402	5260938	394811	10	
16	0	2756374	27974	12617	7977	0, 2867454	31455	3, 4874144	86794	0	74
	10	784324	950	9604558	8059	898961	507	4495120	79024	50	
	20	812251	927	9596418	140	930521	560	4123626	71494	40	
	30	840153	902	88197	221	962135	614	3759434	64192	30	
	40	868032	879	79895	302	0, 2993803	668	3402326	57108	20	
	50	895887	855	71512	383	0, 3025527	724	3052091	50235	10	
17	0	923717	27830	63048	464	057307	780	2708526	43565	0	73
	10	951522	805	54502	546	089143	836	2371438	37088	50	
	20	2979303	781	45876	626	121037	894	2040638	30800	40	
	30	3007058	755	37169	707	152988	31951	1715948	24690	30	
	40	034788	730	28382	787	184998	32010	1397194	18754	20	
	50	062492	704	19514	868	217067	069	1084210	12984	10	
18	0	090170	27678	10565	8949	0, 3249197	130	0776835	07375	0	72
	10	117822	652	9501536	9029	281387	190	0474915	301920	50	
	20	145448	626	9492426	110	313639	252	3, 0178301	296614	40	
	30	173047	599	83236	190	345953	314	2, 9886850	91451	30	
	40	200619	572	73966	270	378330	377	9600422	86428	20	
	50	228164	545	64616	350	410771	441	9318885	81537	10	
19	0	3255682	27518	55185	431	0, 3443276	32505	9042109	76776	0	71
	10	283172	490	45675	510	475846	570	8769970	72139	50	
	20	310634	462	36085	590	508483	637	8502349	67621	40	
	30	338069	435	26415	670	541186	703	8239129	63220	30	
	40	365475	406	16665	750	573956	770	7980198	58931	20	
	50	392853	378	9406835	830	606795	839	7725448	54750	10	
20	0	3420202	27349	9396926	909	0, 3639702	907	7474774	50674	0	70
	10	447522	320	86937	9989	672680	32978	7228075	46699	50	
	20	474813	291	76869	10068	705728	33048	6985254	42821	40	
	30	502074	261	66722	147	738847	119	6746215	39039	30	
	40	529306	232	56495	227	772038	191	6510867	35348	20	
	50	556508	202	46189	306	805303	265	6279121	31746	10	
20	60	3583679	27171	9335804	10385	0, 3838640	33337	2, 6050891	228230	0	69
G	M	Cosin.	Unt.	Sinus	Unt.	Cotang.	Unt.	Tangens	Unt.	M	G

G	M	Log. Sinus	Unt.	Log. Cos.	Unt.	Log. Tang.	Unt.	Log. Cot.	M	G
13	0	9,3520880		9,9887239		9,3633641		10,6366359	0	77
	10	575240	54360	84303	2936	690937	57296	309063	50	
	20	628892	3652	81329	2974	747563	6626	252437	40	
	30	681853	2961	78315	3014	803537	5974	196463	30	
	40	734139	2286	75263	052	858876	5339	141124	20	
	50	785767	1628	72171	092	913595	4719	086405	10	
14	0	836752	0985	69041	130	9,3967711	4116	10,6032289	0	76
	10	887109	50357	65872	169	9,4021237	3526	10,5978763	50	
	20	936852	49743	62663	209	074189	2952	925811	40	
	30	9,3985996	9144	59416	247	126581	2392	873419	30	
	40	9,4034554	8558	56129	287	178425	1844	821575	20	
	50	082539	7985	52803	326	229735	1310	770265	10	
15	0	129962	7423	9,9849438	3365	280525	0790	719475	0	75
	10	176837	6875	46033	405	330804	50279	669196	50	
	20	223176	6339	42589	444	380587	49783	619413	40	
	30	268988	5812	39105	484	429883	9296	570117	30	
	40	314286	5298	35582	523	478704	8821	521296	20	
	50	359080	4794	32019	563	527061	8357	472939	10	
16	0	9,4403381	44301	28416	603	9,4574964	7903	10,5425036	0	74
	10	447197	3816	24774	642	622423	7459	377577	50	
	20	490540	3343	21092	682	669448	7025	330552	40	
	30	533418	2878	17370	722	716048	6600	283952	30	
	40	575840	2422	13608	762	762233	6185	237767	20	
	50	617816	1976	09805	803	808011	5778	191989	10	
17	0	9,4659353	1537	05963	3842	853390	45379	146610	0	73
	10	700461	1108	9,9802081	882	898380	4990	101620	50	
	20	741146	0685	9,9798158	923	942988	4608	057012	40	
	30	781418	40272	94195	3963	9,4987223	4235	10,5012777	30	
	40	821283	39865	90192	4003	9,5031092	3869	10,4968908	20	
	50	860749	9466	86148	044	074602	3510	925398	10	
18	0	899824	9075	82063	085	117760	3158	882240	0	72
	10	938513	8689	77938	125	160575	2815	839425	50	
	20	9,4976824	8311	73773	165	203052	2477	796948	40	
	30	9,5014764	7940	69566	207	245199	2147	754801	30	
	40	052339	7575	65318	248	287021	1822	712979	20	
	50	089556	7217	61030	288	328526	1505	671474	10	
19	0	126419	36863	9,9756701	4329	9,5369719	41193	10,4630281	0	71
	10	162936	6517	52330	371	410606	0887	589394	50	
	20	199112	6176	47918	412	451193	0587	548807	40	
	30	234953	5841	43466	452	491487	0294	508513	30	
	40	270463	5510	38971	495	531492	40005	468508	20	
	50	305650	5187	34435	536	571214	39722	428786	10	
20	0	9,5340517	34867	29858	577	9,5610659	9445	10,4389341	0	70
	10	375069	4552	25239	619	649831	9172	350169	50	
	20	409314	4245	20579	660	688735	8904	311265	40	
	30	443253	3939	15876	703	727377	8642	272623	30	
	40	476893	3640	11132	744	765761	8384	234239	20	
	50	510237	3344	06346	786	803892	8131	196108	10	
20	60	9,5543292	33055	9,9701517	4829	9,5841774	37882	10,4158226	0	69
G	M	Log. Cos.	Unt.	Log. Sin.	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang.	M	G

G	M	Sinus	Unt.	Cosin.	Unt.	Tangens	Unt.	Cotang.	Unt.	M	G
21	0	3583679	0,	9335804	0,	0, 3838640		2, 6050891		0	69
	10	610821	27142	25340	10464	872053	33413	2, 5826094	224797	50	
	20	637932	111	14797	543	905541	488	604649	21445	40	
	30	665013	081	9304175	622	939105	564	386479	18170	30	
	40	692062	049	9293475	700	0, 3972746	641	2, 5171507	14972	20	
	50	719080	27018	82696	779	0, 4006465	719	2, 4959661	11846	10	
22	0	3746066	26986	71839	857	040262	797	750869	08792	0	68
	10	773021	955	60903	10936	074139	877	545061	05808	50	
	20	799944	923	49888	11015	108097	33958	342172	02889	40	
	30	826834	890	38795	093	142136	34039	2, 4142136	200036	30	
	40	853693	859	27624	171	176257	121	2, 3944889	197247	20	
	50	880518	825	16375	249	210460	203	750372	94517	10	
23	0	907311	793	9205049	326	0, 4244749	289	558524	91848	0	67
	10	934071	760	9193644	405	279120	371	369287	89237	50	
	20	960798	727	82161	483	313579	459	2, 3182606	86681	40	
	30	3987491	693	70601	560	348124	445	2, 2998425	84181	30	
	40	4014150	659	58963	638	382756	632	816693	81732	20	
	50	040775	625	47247	716	417476	730	637357	79336	10	
24	0	067366	26591	35454	793	0, 4452287	811	460368	176989	0	66
	10	093923	557	23584	870	487187	900	285676	74692	50	
	20	120445	522	9111637	11947	522179	34992	2, 2113234	72442	40	
	30	146932	487	9099613	12024	557264	35085	2, 1942997	70237	30	
	40	173385	453	87511	102	592439	175	774920	68077	20	
	50	199801	416	75333	178	627709	270	608958	65962	10	
25	0	4226183	26582	63078	255	0, 4663077	368	445069	163889	0	65
	10	252528	345	50746	332	698539	462	283213	61856	50	
	20	278838	310	38338	408	734098	559	2, 1123348	59865	40	
	30	305111	273	25853	485	769755	657	2, 0965436	57912	30	
	40	331348	237	13291	562	805512	757	809438	55998	20	
	50	357548	200	9000654	637	841368	856	655318	54120	10	
26	0	4383711	26163	8987940	714	0, 4877326	35958	503038	152280	0	64
	10	409838	127	75151	789	913386	36060	352565	50473	50	
	20	435927	089	62285	866	949549	163	203862	48703	40	
	30	461978	051	49343	12942	0, 4985816	267	2, 0056897	46965	30	
	40	487992	26014	36327	13016	0, 5022189	373	1, 9911637	45260	20	
	50	513968	25976	23233	094	058668	479	768050	43587	10	
27	0	4539905	937	8910065	168	095254	586	626105	141945	0	63
	10	565804	899	8896821	244	131950	696	485771	40334	50	
	20	591664	860	83502	319	168755	805	347020	38751	40	
	30	617486	822	70108	394	205670	36915	209821	37199	30	
	40	643269	783	56639	469	242698	37028	1, 9074147	35674	20	
	50	669012	743	43095	544	279839	141	1, 8939971	34176	10	
28	0	7694716	25704	29476	619	0, 5317094	255	807265	132706	0	62
	10	720380	664	15782	694	354465	371	676003	31262	50	
	20	746004	624	8802014	768	391952	487	546159	29844	40	
	30	771588	584	8788171	843	429557	605	417709	28450	30	
	40	797131	543	74254	917	467281	724	290628	27081	20	
	50	822634	503	60262	13992	505125	844	164892	25736	10	
28	60	4848096	25462	8746197	14065	0, 5543090	37965	1, 8040478	124414	0	61
G	M	Cosin.	Unt.	Sinus	Unt.	Cotang.	Unt.	Tangens	Unt.	M	G

G	M	Log. Sin.	Unt.	Log. Cof.	Unt.	Log. Tang	Unt.	Log. Cot.	M	G
21	0	9, 5543292		9, 9701517		9, 5841774		10, 4158226	60	68
	10	576060	32768	9, 9696647	4870	879413	37639	120587	50	
	20	608546	2486	91734	913	916812	37399	083188	40	
	30	640754	2208	86779	955	953975	37163	046025	30	
	40	672689	1935	81781	4998	9, 5990908	36933	10, 4009092	20	
	50	704355	1666	76741	5040	9, 6027613	705	10, 3972387	10	
22	0	9, 5735754	1399	71659	082	064096	483	935904	0	68
	10	766892	1138	66533	126	100359	263	899641	50	
	20	797772	0880	61365	168	136407	36048	863593	40	
	30	828397	0625	56153	212	172243	35836	827757	30	
	40	858771	0374	50899	254	207872	629	792128	20	
	50	888897	30126	45602	297	243296	424	756704	10	
23	0	918780	29883	9, 9640261	5341	9, 6278519	223	10, 3721481	0	67
	10	948422	9642	34877	384	313545	35026	686455	50	
	20	9, 5977827	9405	29449	428	348378	34833	651622	40	
	30	9, 6006997	9170	23978	471	383019	641	616981	30	
	40	035936	8939	18463	515	417473	454	582527	20	
	50	064647	8711	12904	559	451743	270	548257	10	
24	0	093133	28486	07302	5602	9, 6485831	34088	10, 3514169	0	66
	10	121397	8264	9, 9601655	647	519742	33911	480258	50	
	20	149441	8044	9, 9595964	691	553477	735	446523	40	
	30	177270	7829	90229	735	587041	564	412959	30	
	40	204884	7614	84450	779	620434	393	379566	20	
	50	232287	7403	78626	824	653662	228	346338	10	
25	0	9, 6259483	27196	72757	869	9, 6686725	33063	10, 3313275	0	65
	10	286472	6989	66844	913	719628	32903	280372	50	
	20	313258	6786	60886	5958	752372	744	247628	40	
	30	339844	6586	54882	6004	784961	589	215039	30	
	40	366231	6387	48834	048	817396	435	182604	20	
	50	392422	6191	42741	093	849681	285	150319	10	
26	0	9, 6418420	25998	9, 9536602	139	9, 6881818	32137	10, 3118182	0	64
	10	444226	5806	30418	184	913809	31991	086191	50	
	20	469844	5618	24188	230	945656	847	054344	40	
	30	495274	5430	17912	276	9, 6977363	707	10, 3022637	30	
	40	520521	5247	11590	322	9, 7008930	567	10, 2991070	20	
	50	545584	5063	9, 9505223	367	040362	432	959638	10	
27	0	9, 6570468	24884	9, 9498809	6414	071659	297	928341	0	63
	10	595173	4705	92349	460	102824	165	897176	50	
	20	619702	4529	85842	507	133859	31035	866141	40	
	30	644056	4354	79289	553	164767	30908	835233	30	
	40	668238	4182	72689	600	195549	782	804451	20	
	50	692250	4012	66043	646	226207	658	773793	10	
28	0	9, 6716093	23843	9, 9459349	6694	9, 7256744	537	10, 2743256	0	62
	10	739769	3676	52609	740	287161	417	712839	50	
	20	763281	3512	45821	788	317460	299	682540	40	
	30	786629	3348	38985	836	347644	184	652356	30	
	40	809816	3187	32102	883	377714	30070	622286	20	
	50	832843	3027	25171	931	407672	29958	592328	10	
28	60	9, 6855712	22869	9, 9418193	6978	9, 7437520	29848	10, 2562480	0	61
G	M	Log. Cof.	Unt.	Log. Sinus	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang	M	G

ſſ

G	M	Sinus	Unt.	Cosin.	Unt.	Tangens	Unt.	Cotang.	Unt.	M	G
29	0	4848096	0,	8746197	0,	0, 5543090		1, 8040478		60	60
	10	873517	25421	32058	14139	581179	38089	1, 7917362	123116	50	
	20	898897	380	17844	214	619391	212	795524	121838	40	
	30	924236	339	8703557	287	657728	337	674940	120584	30	
	40	949532	296	8689196	361	696191	463	555590	119350	20	
	50	4974787	255	74762	434	734783	592	437453	8137	10	
30	0	5000000	213	60254	508	773503	720	320508	6945	0	60
	10	025170	170	45673	581	812353	850	204736	5772	50	
	20	050299	129	31019	654	851335	38982	1, 7090116	4620	40	
	30	075384	085	16292	727	890450	39115	1, 6976631	3485	30	
	40	100426	25042	8601491	801	929699	249	864261	2370	20	
	50	125425	24999	8586618	873	0, 5969084	385	752988	1273	10	
31	0	5150381	956	71673	14945	0, 6008606	522	642795	110193	0	59
	10	175293	912	56655	15018	048266	660	533663	109132	50	
	20	200161	868	41564	091	088067	801	425576	8087	40	
	30	224986	825	26402	162	128008	39941	318517	7059	30	
	40	249766	780	8511166	236	168092	40084	212469	6048	20	
	50	274502	736	8495860	306	208320	228	107417	5052	10	
32	0	5299193	691	80481	379	248694	374	1, 6003345	4072	0	58
	10	323839	646	65030	451	289215	521	1, 5900238	3107	50	
	20	348440	601	49508	522	329883	668	798079	2159	40	
	30	372996	556	33914	594	370703	820	696856	1223	30	
	40	397507	511	18249	665	411673	40970	596552	100304	20	
	50	421971	464	8402513	736	452797	41124	497155	99397	10	
33	0	5446390	24419	8386706	807	0, 6494076	279	398650	8505	0	57
	10	470763	373	70827	879	535511	435	301023	7627	50	
	20	495090	327	54878	15949	577103	592	204261	6762	40	
	30	519370	280	38858	16020	618856	753	108352	5909	30	
	40	543603	233	22768	090	660769	41913	1, 5013282	5070	20	
	50	567790	187	8306607	161	702845	42076	1, 4919038	4244	10	
34	0	5591929	139	8290376	231	745085	240	825610	3428	0	56
	10	616021	092	74074	302	787492	407	732983	2627	50	
	20	640065	24044	57703	371	830066	574	641147	1836	40	
	30	664062	23997	41262	441	872810	744	550090	1057	30	
	40	688011	949	24751	511	915724	42914	459801	90289	20	
	50	711912	901	8208170	581	0, 6958813	43089	370268	89533	10	
35	0	5735764	852	8191521	649	0, 7002075	262	281480	8788	0	55
	10	759568	804	74801	720	045515	440	193427	8053	50	
	20	783323	755	58013	788	089133	618	106098	7329	40	
	30	807030	707	41155	858	132931	798	1, 4019483	6615	30	
	40	830687	657	24229	926	176911	43980	1, 3933571	5912	20	
	50	854294	607	8107233	16996	221075	44164	848353	5218	10	
36	0	5877853	23559	8090170	17063	265426	351	763819	4534	0	54
	10	901361	508	73038	132	309963	537	679959	3860	50	
	20	924819	458	55837	201	354691	728	596764	3195	40	
	30	948228	409	38569	268	399611	44920	514224	2540	30	
	40	971586	358	21232	337	444724	45113	482331	1893	20	
	50	5994893	307	8003827	405	490033	45309	351075	1256	10	
36	60	6018150	23257	7986355	17472	0, 7535540	45507	1, 3270448	80627	0	53
G	M	Cosin.	Unt.	Sinus	Unt.	Cotang.	Unt.	Tangens	Unt.	M	G

G	M	Log. Sin.	Unt.	Log. Cos.	Unt.	Log. Tang.	Unt.	Log. Cot.	M	G
29	0	9,6855712		9,9418193		9,7437520		10,2562480	60	60
	10	878425	22713	9,9411166	7027	467259	29739	532741	50	
	20	900983	558	9,9404091	075	496892	633	503108	40	
	30	923388	405	9,9396968	123	526420	528	473580	30	
	40	945642	254	89796	172	555846	426	444154	20	
	50	967745	22103	82576	220	585170	324	414830	10	
30	0	9,6989700	21955	75306	270	9,7614394	224	10,2385606	0	60
	10	9,7011508	808	67988	318	643520	126	356480	50	
	20	033170	662	60621	367	672550	29030	327450	40	
	30	054689	519	53204	417	701485	28935	298515	30	
	40	076064	375	45738	466	730327	842	269673	20	
	50	097299	235	38222	7516	759077	750	240923	10	
31	0	9,7118393	21094	30656	566	9,7787737	660	10,2212263	0	59
	10	139349	20956	23040	616	816309	572	183691	50	
	20	160168	819	15374	666	844794	485	155206	40	
	30	180851	683	9,9307658	716	873193	399	126807	30	
	40	201399	548	9,9299891	767	901508	315	098492	20	
	50	221814	415	92073	818	929741	233	070259	10	
32	0	9,7242097	283	84205	868	957892	151	042108	0	58
	10	262249	152	76285	920	9,7985964	28072	10,2014036	50	
	20	282271	20022	68314	7971	9,8013957	27993	10,1986043	40	
	30	302165	19894	60292	8022	041873	916	958127	30	
	40	321932	767	52218	074	069714	841	930286	20	
	50	341572	640	44092	126	097480	766	902520	10	
33	0	9,7361088	516	35914	178	125174	694	874826	0	57
	10	380479	391	27684	230	152795	621	847205	50	
	20	399748	269	19401	283	180347	552	819653	40	
	30	418895	147	11066	335	207829	482	792171	30	
	40	437921	19026	9,9202678	388	235244	415	764756	20	
	50	456828	18907	9,9194237	441	262592	348	737408	10	
34	0	9,7475617	789	85742	8495	9,8289874	282	10,1710126	0	56
	10	494287	670	77194	548	317093	219	682907	50	
	20	512842	555	68593	601	344249	156	655751	40	
	30	531280	438	59937	656	371343	094	628657	30	
	40	549604	324	51228	709	398377	27034	601623	20	
	50	567815	211	42464	764	425351	26974	574649	10	
35	0	9,7585913	18098	33645	819	9,8452268	917	10,1547732	0	55
	10	603899	17986	24772	873	479127	859	520873	50	
	20	621775	876	15844	928	505931	804	494069	40	
	30	639540	765	9,9106860	8984	532680	749	467320	30	
	40	657197	657	9,9097821	9039	559375	695	440625	20	
	50	674746	549	88727	094	586019	644	413981	10	
36	0	9,7692187	441	79576	151	9,8612610	26591	10,1387390	0	54
	10	709522	335	70370	206	639152	542	360848	50	
	20	726751	229	61107	263	665644	492	334356	40	
	30	743876	125	51787	320	692089	445	307911	30	
	40	760897	17021	42411	376	718486	397	281514	20	
	50	777815	16918	32977	434	744838	352	255162	10	
36	60	9,7794630	16815	9,9023486	9491	9,8771144	26306	10,1228856	0	53
G	M	Log. Cos.	Unt.	Log. Sin.	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang.	M	G

G	M	Sinus	Unt.	Cofin.	Unt.	Tangens	Unt.	Cotang.	Unt.	M	G
37	0	6018150	0,	7986355	0,	0, 7535540		1, 3270448		0	53
	10	041356	23206	68815	17540	581248	45708	190441	80007	50	
	20	064511	155	51208	607	627157	5909	111046	79395	40	
	30	087614	103	33533	675	673270	6113	1, 3032254	8792	30	
	40	110666	052	7915792	741	719589	6319	1, 2954057	8197	20	
	50	133666	23000	7897983	809	766117	6528	876447	7610	10	
38	0	6156615	22949	80107	876	712856	6739	799416	7031	0	52
	10	179511	896	62165	17942	859808	6952	722957	6459	50	
	20	202355	844	44157	18008	906975	7167	647062	5895	40	
	30	225146	791	26082	075	0, 7954359	7384	571723	5339	30	
	40	247885	739	7807940	142	0, 8001963	7604	496933	4790	20	
	50	270571	686	7789733	207	049790	7827	422685	4248	10	
39	0	6293204	633	71460	273	097840	48050	1, 2348972	73713	0	51
	10	315784	580	53121	339	146118	8278	275786	3186	50	
	20	338309	525	34716	405	194625	8507	203121	2665	40	
	30	360782	473	7716246	470	243364	8739	130970	2151	30	
	40	383201	419	7697710	536	292337	8973	1, 2059327	1643	20	
	50	405566	365	79110	600	341547	9210	1, 1988184	1143	10	
40	0	6427876	310	60444	666	0, 8390996	9449	917536	0648	0	50
	10	450132	256	41714	730	440688	9692	847376	70160	50	
	20	472334	202	22919	795	490624	49936	777698	69678	40	
	30	494480	146	7604060	859	540807	50183	708496	9202	30	
	40	516572	092	7585136	924	591240	0433	639763	8733	20	
	50	538609	22037	66147	18989	641926	0686	571495	8268	10	
41	0	6560590	21981	47096	19051	692867	0941	1, 1503684	7811	0	49
	10	582516	926	27980	116	744067	1200	436326	7358	50	
	20	604386	870	7508800	180	795528	1461	369414	6912	40	
	30	626201	815	7489557	243	847253	1725	302944	6470	30	
	40	647959	758	70251	306	899245	1992	236909	6035	20	
	50	669661	702	50881	370	0, 8951506	2261	171305	5604	10	
42	0	6691306	645	31448	433	0, 9004041	52535	106125	65180	0	48
	10	712895	589	7411953	495	056851	2810	1, 1041365	4760	50	
	20	734427	532	7392394	559	109941	3090	1, 0977020	4345	40	
	30	755902	475	72773	621	163312	3371	913085	3935	30	
	40	777320	418	53090	683	216968	3656	849554	3531	20	
	50	798681	361	33345	745	270914	3946	786423	3131	10	
43	0	6819984	303	7313537	808	325151	54237	723687	2736	0	47
	10	841229	245	7293667	870	379683	4532	661341	2346	50	
	20	862416	187	73736	931	434513	4830	599381	1960	40	
	30	883545	129	53744	19992	489646	5133	537801	1580	30	
	40	904617	072	33690	20054	545083	5437	476598	1203	20	
	50	925630	21013	7213574	116	600829	5746	415767	0831	10	
44	0	946584	20954	7193398	176	0, 9656888	56059	1, 0355303	0464	0	46
	10	967479	895	73161	237	713262	6374	295203	60100	50	
	20	6988315	836	52863	298	769956	6694	235461	59742	40	
	30	7009093	778	32505	358	826973	7017	176074	9387	30	
	40	029810	717	7112086	419	884316	7343	117037	9037	20	
	50	050469	659	7091607	479	0, 9941991	7675	058347	8690	10	
44	60	7071068	20599	7071068	20539	1, 0000000	58009	1, 0000000	58347	0	45
G	M	Cofin.	Unt.	Sinus	Unt.	Cotang.	Unt.	Tangens	Unt.	M	G

G	M	Log. Sin.	Unt.	Log. Cos.	Unt.	Log. Tang.	Unt.	Log. Cot.	M	G
37	0	9, 7794630		9, 9023486		9, 8771144		10, 1228856	0	53
	10	811344	16714	9, 9013938	9548	797407	26263	202593	50	
	20	827958	614	9, 9004331	607	823627	220	176373	40	
	30	844471	513	9, 8994667	664	849805	178	150195	30	
	40	860886	415	84944	723	875942	137	124058	20	
	50	877202	316	75162	782	902040	098	097960	10	
38	0	893420	218	65321	841	928098	058	071902	0	52
	10	909541	121	55422	899	954119	26021	045881	50	
	20	925566	16025	45463	9959	9, 8980104	25985	10, 1019896	40	
	30	941496	15930	35444	10019	9, 9006052	948	10, 0993948	30	
	40	957330	834	25365	079	031966	914	968034	20	
	50	973071	741	15226	139	057845	879	942155	10	
39	0	0, 7988718	647	9, 8905026	200	083692	847	916308	0	51
	10	9, 8004272	554	9, 8894765	261	109507	815	890493	50	
	20	019735	463	84444	321	135291	784	864709	40	
	30	035105	370	74061	383	161045	754	838955	30	
	40	050385	280	63616	445	186769	724	813231	20	
	50	065575	190	53109	507	212466	697	787534	10	
40	0	080675	100	42540	10569	9, 9238135	25669	10, 0761865	0	50
	10	095686	15011	31908	632	263778	643	736222	50	
	20	110609	14923	21213	695	289396	618	710604	40	
	30	125444	835	9, 8810455	758	314989	593	685011	30	
	40	140192	748	9, 8799634	821	340559	570	659441	20	
	50	154854	662	88748	886	366105	546	633895	10	
41	0	9, 8169429	575	77799	10949	391631	25526	608369	0	49
	10	183919	490	66785	11014	417135	504	582865	50	
	20	198325	406	55706	079	442619	484	557381	40	
	30	212646	321	44561	145	468084	465	531916	30	
	40	226883	237	33352	209	493531	447	506469	20	
	50	241037	154	22076	276	518961	430	481039	10	
42	0	255109	14072	9, 8710735	341	9, 9544374	25413	10, 0455626	0	48
	10	269098	13989	9, 8699326	409	569772	398	430228	50	
	20	283006	908	87851	475	595155	383	404845	40	
	30	296833	827	76309	542	620525	370	379475	30	
	40	310580	747	64699	610	645881	356	354119	20	
	50	324246	666	53021	678	671225	344	328775	10	
43	0	9, 8337833	587	41275	746	696559	25234	303441	0	47
	10	351341	508	29460	815	721882	323	278118	50	
	20	364771	430	17576	884	747195	313	252805	40	
	30	378122	351	9, 8605622	11954	772500	305	227500	30	
	40	391396	274	9, 8593599	12023	797797	297	202203	20	
	50	404593	197	81505	094	823087	290	176913	10	
44	0	417713	120	69341	164	9, 9848372	25285	10, 0151628	0	46
	10	430757	13044	57106	235	873651	279	126349	50	
	20	443725	12968	44799	307	898926	275	101074	40	
	30	456618	893	32421	378	924197	271	075803	30	
	40	469436	818	19970	451	949466	269	050534	20	
	50	482180	744	9, 8507446	524	9, 9974734	268	10, 0025266	10	
44	60	9, 8494850	12670	9, 8494850	12596	10, 0000000	25266	10, 0000000	0	45
G	M	Log. Cos.	Unt.	Log. Sinus	Unt.	Log. Cot.	Unt.	Log. Tang.	M	G

Regeln zur Berechnung geradlinigter Dreyecke.

Wenn die Theile eines Dreyeckes einander gegenüber liegen, und wir machen keinen Unterschied zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken, so schließe man:

Wie sich verhalten die Sinus der Winkel, eben so verhalten sich die, den Winkeln gegenüberliegende Seiten.

Wenn in einem Dreyecke zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, so finden sich die anderen beyden Winkel desselben durch folgendes Verfahren:

1°. Ziehe man den gegebenen Winkel von 180° ab und theile den Rest durch 2.

2°. Suche man die Summe und den Unterschied der gegebenen Seiten.

3°. Schließe man: wie sich verhält die Summe der Seiten zu ihrem Unterschiede, eben so verhält sich die Tangente des nach 1° gefundenen Winkels zum vierten Proportional Gliede.

4°. Dieses vierte Proportional Glied schlage man unter den Tangenten nach, und setze entweder den zustimmenden Winkel zu dem nach 1° gefundenen hinzu, oder nehme ihn davon hinweg, so kommt im ersten Fall der gesuchte größere Winkel, und im letzten Fall der gesuchte kleinere Winkel heraus.

Wenn in einem Dreyeck alle Seiten gegeben sind, so kann ein jeder der dreyen Winkel desselben folgendermaßen gefunden werden.

1°. Suche man den Unterschied der Seiten, die den gesuchten Winkel einschließen, diesen Unterschied addire und subtrahire man zu, und von derjenigen Seite, welche dem gesuchten Winkel gegenüber liegt, und addire die Logarithmen der herauskommenden Zahlen.

2°. Suche man die Summe der Logarithmen von den doppelten Seiten, welche den gesuchten Winkel einschließen.

3°. Ziehe man das, was nach 2° gefunden wird, von dem, was nach 1° herausgekommen ist, gehörig ab, und theile den Rest durch 2, so kommt der Logarithmus des Sinus von der Hälfte des gesuchten Winkels heraus, welcher nunmehro leicht aus den Tabellen bestimmt werden kann.

Diese wenige Regeln sind zureichend einen jeden bey Auflösung trigonometrischer Auflösungen auszuhelfen.

Erklä-

Erklärung und Gebrauch vorstehender Tafeln.

§. 1.

Die erste dieser drey verschiedenen Tabellen enthält die Briggischen oder gewöhnlichen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000, bis auf die 7 ersten Stellen eines zehentheiligen Bruches genau, nach folgender Einrichtung. Von 1 bis 100 folgen die Logarithmen der Zahlen in gehöriger Ordnung aufeinander, und sind mit ihren zusammenstimmenden Kennziffern versehen; ferner folgen die Logarithmen aller Zahlen zwischen 100 und 1000 in fortlaufenden Spalten, aber ohne Kennziffern, weil sich dieselben leicht nach §. 48. finden lassen. Bey der Zahl 1000 selbst, geht eine von der vorigen ganz verschiedene Ordnung an, und bleibet bis zu Ende dieser Tafel die nemliche; diese Einrichtung ist es, welche wir hier umständlicher erklären wollen.

§. 2.

Erstlich findet man über jeder Seite neben ein No. eine Zahl, welche anzeigt: daß die Seite mit dem Logarithmen derselben Zahl anfängt, so zum Beyspiel, wo wir neben No. die Zahl 2500 finden, da bedeutet dieses, daß die Seite mit dem Logarithmen der Zahl 2500 anfängt, und nun ist die Einrichtung so getroffen, daß jede Seite die Logarithmen von 500 Zahlen, der Ordnung nach, enthalte, so daß demnach auf jeden zween gegenüberstehenden Seiten die Logarithmen von 1000 aufeinander folgenden Zahlen vorkommen, welches das Nachschlagen der Logarithmen nicht wenig erleichtert. Um dieses zu erhalten, so habe ich von jeder Zahl nur die ersten Ziffern in die erste Spalte jeder Seite gesetzet, auf dieser ersten Spalte aber zehn andere Spalten folgen lassen, über und unter denen die letzte Ziffer angetroffen wird, welche zu den dreyen ersten Ziffern, so in der ersten Spalte stehen, gehöret.

§. 3.

Neben der Zahl, so gleich hinter No. folget, stehet auf jeder Seite hinter ein L eine Zahl, welche ferner anzeiget: mit

welchen Ziffern der erste, auf jeder Seite vorkommende Logarithmen sich anfängt. Dieses ist von großer Bequemlichkeit, wenn aus einem gegebenen Logarithmen die zustimmende Zahl gefunden werden muß. Bey allen Logarithmen ist die Kennziffer weggelassen, da dieselbe immer leicht für jede gegebene Zahl aus der Anzahl und Ordnung der Ziffern bestimmt werden kann, ferner findet man nur den Logarithmen einer Zahl ganz in der Spalte, welche oben und unten mit o bezeichnet ist, wenn die vierte Ziffer einer gegebenen Zahl selbst eine o ist; in allen übrigen Fällen enthält die mit o bemerkte Spalte bloß die zwo ersten Ziffern eines Logarithmen, davon die fünf letzten jedesmal in der Spalte stehen, über oder unter welcher die vierte Ziffer der gegebenen Zahl angetroffen wird, welches alles umständlicher aus folgenden Aufgaben erhellen wird.

Zu einer gegebenen Zahl den Logarithmen zu finden.

§. 4.

Es sey zuförderst von einer ganzen Zahl, so durch vier Ziffern ausgedrückt werden kann, der Logarithmus zu finden, so verfahre man nach folgender Regel:

1°. Schlage man die gegenüberstehenden Seiten der Tabelle auf, welche das Tausend enthalten, worunter die gegebene Zahl gehört.

2°. Suche man in der ersten Spalte einer der beyden Seiten die drey ersten Ziffern der gegebenen Zahl, und fahre mit dem Finger in derselben Zeile bis in diejenige Spalte, über oder unter welcher die vierte Ziffer der gegebenen Zahl angetroffen wird.

3°. Die daselbst stehende Zahl schreibe man gehörig aus, so hat man die fünf letzten Ziffern des Logarithmen gefunden, dessen beyde erste Ziffern in der nemlichen Zeile, oder etwas höher in der mit o bezeichneten Spalte angetroffen werden.

Anmerkung. Es ist hier bey 3° vorzüglich dahin zu sehen: ob die Zahlen der nemlichen Zeile, welche den fünf ausgeschriebenen letzten Ziffern des Logarithmen vorgehen, sämtlich kleiner sind, als die Zahl, welche diese fünf Ziffern ausdrucken; denn ist dieses, so bleibet die Regel ungeändert, findet sich hingegen, daß nur eine einzige Zahl, in den vordern Spalten der nemlichen Zeile, größer ist, als diejenige, welche die ausgeschriebene fünf Ziffern ausdrücken, so müssen die beyden ersten Ziffern der mit o bezeichneten Spalte genommen werden, die etwas unter der Zeile liegen, worinn die fünf letzten

letzten Ziffern des gesuchten Logarithmen sind ausgeschrieben worden. Wir wollen jetzt solches durch schickliche Beyspiele noch weiter erläutern.

I. Beyspiel. Es sey der Logarithmus von der Zahl 4796 zu finden, so schlage man die Seiten der Tabellen auf, wo man oben No. 4000 und No. 4500 findet, weil die gegebene Zahl zu 4000 gehört. Ferner suche man auf der mit No. 4500 bemerkten Seite die ersten Ziffern 479 in der ersten Spalte auf, und fahre in derselben mit dem Finger bis in die mit 6 bezeichneten Spalte, so findet man daselbst die fünf letzten Ziffern des gesuchten Logarithmen 08792. Um endlich die zugehörigen zwey ersten Ziffern zu finden, so nehme man dieselbe aus der mit o bemerkten Spalte, welche wir hier in der nemlichen Zeile finden, da der Fall, wozu die Anmerkung dienet, hier nicht eintritt. Da demnach die zwey ersten Ziffern hier 68 sind, so ist der gesuchte Logarithmus ohne Kennziffer 6808792, folglich, da eine ganze Zahl, die aus vier Ziffern besteht nach § 48 zur Kennziffer 3 hat, so ist log. 4796 = 3. 6808792.

Es verstehet sich übrigens ohne Erinnerung, daß, wenn die fünf letzten Ziffern selbst in der mit o bezeichneten Spalte und unmittelbar vor denselben zwey Ziffern gefunden werden, man sodenn nur alle Ziffern der mit o bemerkten Spalte auszuschreiben habe; so würde man log. 4790 = 3. 6803355 finden.

II. Beyspiel. Es sey der Logarithmus von 7356 zu finden, so schlage man die Seite nach, über welche No. 7000 stehet. Auf dieser Seite suche man die drey ersten Ziffern 735 der gegebenen Zahl in der ersten Spalte; in der Zeile, wo man diese findet, fahre man bis in die mit 6 bemerkten Spalte, und schreibe die daselbst stehende Zahl 66417 aus, so hat man die 5 letzten Ziffern des gesuchten Logarithmen gefunden. Da nun alle Zahlen dieser Zeile in den vorhergehenden Spalten kleiner als die ausgeschriebene sind, und die Zeile, worinnen die 5 letzten Ziffern gefunden worden, selbst keine Anfangsziffern hat, so gelten für dieselbe noch die zwo ersten Ziffern der höheren Zeilen, welche wir hier 86 finden. Demnach ist der gesuchte Logarithmus, da dessen Kennziffer drey seyn muß, 3. 8666417.

III. Beyspiel. Es sey der Logarithmus von 6765 zu suchen, so findet man, wenn, wie in vorigen Beyspielen verfahren wird, die fünf letzten Ziffern des gesuchten Logarithmen 02678. Da aber hier außerdem die Zahl 99467 in der o Zeile gefunden wird, die größer als 02678 ist, so stimmen zu 02678 nicht die höher herausliegenden zwo ersten Ziffern

fern 82, sondern vielmehr die nächstfolgenden 83, und der gesuchte Logarithmus wird demnach 3. 8302678 gefunden. Dieses ist sehr zu merken, wenn man nicht beym Nachschlagen der Logarithmen grobe Fehler begehen will.

§. 5.

Nachdem ich nunmehro gezeiget habe, wie man den Logarithmen einer jeden Zahl, so nur aus 4 Ziffern bestehet, finden könne, so bleibt mir noch übrig zu erklären, wie man verfahren müsse, um den Logarithmen einer jeden Zahl, welche aus sieben oder weniger Ziffern bestehet, zu bestimmen; denn da die Logarithmen dieser Tafel nur bis auf sieben Stellen eines zehentheiligen Bruches angegeben sind, so kann man auch nur den Logarithmen einer gegebenen Zahl für die 7 ersten Ziffern derselben genau finden, indem man nach folgender Regel verfährt.

1°. Schneide man von den Ziffern, wodurch eine gegebene Zahl ausgedruckt wird, mittelst eines Striches die 4 ersten Ziffern ab, und suche für dieselbe nach vorigem § den zustimmenden Logarithmen; die übrigen Ziffern betrachte man hingegen als einen zehentheiligen Bruch, ohne sich an die Ordnung dieser Ziffern zu binden.

2°. Ziehe man die nach vorigen § gefundene 5 letzten Ziffern des Logarithmen von den 5 unmittelbar darauf folgenden der nemlichen Zeile ab, und merke den Rest, und wo dieses nicht angehen sollte, da schreibe man vor der ersten Ziffer der folgenden Spalte eine 1, und verfahre, wie vorhin. Wären hingegen die 5 letzten Ziffern in der letzten Spalte, so müßten diese von den 5 letzten Ziffern der 0 Spalte in der folgenden Zeile abgezogen werden.

3°. Schließe man: wie sich verhält 1 zu dem nach 1° gefundenen zehentheiligen Bruch, eben so verhält sich der nach 2° gefundene Rest zum vierten Proportional-Gliede, welches zu dem nach vorigen § gefundenen Logarithmen addirt den gesuchten Logarithmen giebt.

Beyspiel. Es sey der Logarithmus von 16,5965 zu finden; so schneide man von der gegebenen Zahl die vier ersten Ziffern durch einen Strich ab, so kommt 16,59|65, und nun wird, weil hier die Kennziffer nur 1 ist, nach vorigen §, log. 16,59 = 1. 2198464 gefunden, und indem man die beyden Ziffern, 65 hinter dem Strich als einen zehentheiligen Bruch betrachtet, so ist derselbe = 0,65.

Die

Die 5 letztern Ziffern 98464 des gefundenen Logarithmen, müßten demnach hier, da sie in der letzten Spalte stehen, von den 5 letzten Ziffern 01081 der 0 Spalte der folgenden Zeile abgezogen werden, da dieses aber unmöglich, so schreibe man vor diesen 5 Ziffern noch 1, so kommt 101081, und wenn nun 98464 davon weggenommen werden, so bleibt 2617 zum Rest.

Nun schließe man nach 3°:

1 : 0,65 = 2617: vierten Proportional-Gliede,

oder indem man die zwey ersten Glieder mit 100 vervielfältiget.

100: 65 = 2617: vierten Proportional-Gliede,

woraus sich das vierte Glied 1701 ergiebt. Addirt man daher diese Zahl zu dem zehentheiligen Bruch des Logarithmen, so wird derselbe in 2200165 verwandelt, und somit ergiebt sich log. 16,5965 = 1. 2200165.

Anmerkung. Eben so würde man verfahren, wenn eine gegebene Zahl, statt aus 6 Ziffern zu bestehen, deren 5 oder 7 hätte, welches auch ohne alle Erinnerung für sich klar ist.

Aus einem gegebenen Logarithmen die zustimmende Zahl zu finden.

§. 6.

Soll hingegen umgekehrt, aus einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl bestimmt werden, so lasse man zuförderst die Kennziffer des Logarithmen aus der Acht und verfahre mit dem zehentheiligen Bruche, wie folget:

1°. Suche man in der mit 0 bemerkten Spalte die zwo ersten Ziffern des zehentheiligen Bruches.

2°. Wenn die übrigen fünf Ziffern des zehentheiligen Bruches eine größere Zahl als diejenige ausdrücken, welche durch die neben den nach 1° gefundenen zwo ersten Ziffern stehende fünf letzte Ziffern angegeben wird, so suche man entweder in der nemlichen oder in den folgenden Zeilen eine Zahl, welche so nahe als möglich eben dieselbe ist, als diejenige, welche die fünf letzten Ziffern des Logarithmen ausdrücken, findet sich hingegen, daß die fünf letzten Ziffern eine kleinere Zahl angeben als diejenige ist, welche durch die fünf Ziffern so unmittelbar neben den zwo ersten in der 0 Spalte stehen, ausgedruckt wird, so muß diese Zahl in den unmittelbar vorhergehenden Zeilen nachgesucht werden.

 3°. Die

3°. Die Zahl, welche man sodann in der nemlichen Zeile in der ersten Spalte findet, giebt die drey ersten, und diejenigen, welche über oder unter der Spalte stehet, worinnen die, den fünf lezten Ziffern des Logarithmen am nächsten kommende Zahl gefunden worden, die vierte Ziffer der gesuchten, und dem gegebenen Logarithmen entsprechende Zahl an.

Anmerkung. Die Zahlen, welche man hinter L auf jeder Seite dieser Tafel antrift, dienen, um geschwinder die Seite zu finden, auf welcher in der 0 Spalte die zwo ersten Ziffern eines gegebenen Logarithmen gefunden werden, so wie dieses gleich aus folgendem Beyspiele näher erhellen wird.

I. Beyspiel. Es sey der Logarithmus 2. 8255601 gegeben und man solle die zugehörige Zahl bestimmen, so lasse man zuförderst die Kennziffer 2 weg, und suche diejenige Seite, welche hinter L eine unmittelbar kleinere Zahl als 82 hat; diese findet sich nun da, wo hinter L 81 stehet, denn auf dieser Seite findet man in der 0 Spalte die zwo ersten Ziffern 82, und unmittelbar darneben 02015. Da nun die fünf letzten Ziffern des gegebenen Logarithmen 55601 sind, mithin eine ungleich größere Zahl als 02015 ausdrücken, so muß nach 2° in der nemlichen oder folgenden Zeilen eine Zahl gesucht werden, welche 55601 so nahe als möglich kommet, diese ist keine andere als 55559, welche in der Zeile, so in der ersten Spalte 669 hat, und in der oben und unten mit 2 bemerkten Spalte angetroffen wird.

Es kann demnach die, dem Logarithmen entsprechende Zahl, durch 6692 ausgedruckt werden, allein da die Kennziffer des Logarithmen nur 2 ist, so kann man von diesen vier Ziffern nur die drey ersten für die gesuchte Zahl behalten, da die letzte Ziffer 2 hier schon die erste Stelle eines zehentheiligen Bruches angiebt. Demnach ist bis auf Zehentheile genau 2.8255601 = log. 669,2.

II. Beyspiel. Hätte man uns hingegen den Logarithmen 0. 4305613 gegeben, um die zustimmende Zahl zu suchen, so würden wir auf der Seite, über welcher L 39 stehet, in der 0 Spalte die 2 ersten Ziffern 43 des gegebenen Logarithmen und neben denselben 13638 finden. Da demnach in diesem Falle die fünf letzten Ziffern des gegebenen Logarithmen 05613 eine kleinere Zahl als 13638 ausdrücken, so muß nach 2° in den unmittelbar darüber stehenden Zeilen die Zahl gesucht werden, welche 05613 am nächsten kommt. Diese findet sich nun 05588, welche in der Zeile stehet, so in der vordersten Spalte

die

die Zahl 269 hat; mithin, da die Zahl 05588 auch zugleich in der oben und unten mit 5 bezeichneten Spalte gefunden wird, so wäre die gesuchte Zahl 2695, allein da die Kennziffer 0 ist, so kann dieselbe nur 2,695 seyn.

§. 7.

Ohngeachtet wir im vorigen § nur gezeiget haben: wie man zu einem gegebenen Logarithmen die zustimmende Zahl bis auf die vierte Ziffer genau bestimmen könne, so ist dennoch zu merken, daß die gesuchte Zahl immer bis auf die 7te Ziffer genau bestimmt werden könne, indem man folgendermaßen verfährt:

1°. Nachdem die vier ersten Ziffern nach vorigem § gehörig gefunden sind, so ziehe man von der Zahl, so durch die fünf letzten Ziffern eines Logarithmen ausgedruckt wird, diejenige ab, so ihr am nächsten kommt, und merke den Rest.

2°. Die Zahl, welche den fünf letzten Ziffern eines Logarithmen am besten entspricht, ziehe man von derjenigen gehörig ab, so in der nemlichen Zeile, und zwar in der unmittelbar folgenden Spalte gefunden wird, und merke den Ueberrest.

3°. Schließe man, wie sich verhält, der nach 2° gefundene Rest zu dem nach 1° bestimmten, eben so verhält sich 1 zu einem zehentheiligen Bruch, den man bis auf die drey ersten Ziffern genau bestimmen kann.

4°. Die nach 3° gefundene Ziffern füge man, ohne auf ihre Ordnung zu sehen, den nach vorigen § gefundenen vier ersten Ziffern des Logarithmen hinzu, und bestimme aus der gegebenen Kennziffer zuletzt die Ordnung der gefundenen sieben Ziffern.

Beyspiel. Wir wollen hier das letzte Beyspiel des vorigen § beybehalten, so hat man 05613 — 05588 = 25 für den nach 1° zu suchenden Rest, und da ferner 07199 — 05588 = 1611 für den nach 2° zu bestimmenden Rest gefunden wird, so schließe man nach 3°

1611 : 25 = 1 : zehentheiligen Bruch,

und es findet sich der gesuchte zehentheilige Bruch bis auf die dritte Stelle genau = 0,015.

Setzen wir daher die drey Ziffern 015, welche den zehentheiligen Bruch ausdrucken, zu den schon gefundenen vier ersten Ziffern 2695 hinzu, so kommt 2695015 für die gesuchte Zahl; mithin, da die Kennziffer 0 ist, so ist 0, 4305613 =

 log.

log. 2,695015, bey welcher Zahl auch die letzte Ziffer des zehentheiligen Bruches noch genau ist.

Anmerkung. Die hier gegebene Regeln mögen zureichen, sich einen richtigen Begrif vom Gebrauch der logarithmischen Tabellen zu machen. Ich hoffe auch, man werde diese Regeln nicht zu weitläuftig finden, denn es war nöthig hier den Gebrauch der Tabellen, so umständlich, als möglich, zu erläutern, um Anfängern in den Stand zu setzen, sich derselben mit Zuverläßigkeit bedienen zu können. Uebrigens wird ein öfterer Gebrauch dieser Tabellen leicht jeden in den Stand setzen, diese Regeln zu ersparen.

§. 8.

Auf der Tafel der Logarithmen folgt unmittelbar eine andere, welche die Quadratzahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000 enthält; ferner folget auf diese eine ähnliche Tafel für die Cubiczahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000. Da diese beyde Tabellen zu ähnlichen Entzwecken bestimmt sind, so können wir das, was wir von denselben zu sagen haben, hier zusammen fassen.

Erstlich findet man in denselben die Quadrat- und Würfelzahlen einer jeden vorgegebenen Zahl, so unter 1000 ist, unmittelbar angegeben.

Zweytens kann man mittelst derselben auch leicht die Quadrat- und Würfelzahlen, von Zahlen, die mehr als 1000 betragen, finden, wenn man jede derselben nur in zween Theile a und b zerfällt, davon der erste Theil sich mit 3 Nullen endiget, und kleiner als 1000000, und der andere kleiner als 1000 ist. Denn bey den Quadraten ist $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$ und bey den Würfelzahlen $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\,ab\,(a + b)$, welches folgende Beyspiele näher erläutern werden.

I. Beyspiel. Es sey das Quadrat von 896543 zu finden, so zerfälle man diese Zahl in 896000 + 543, so kann a = 896000 und b = 543 genommen werden, und wir erhalten $896543^2 = 896000^2 + 543^2 + 2.896000.543$. Nun ist aber nach der Tafel das Quadrat von 896 gleich 802816, so wie wir diese Zahl, in der mit 800 bemerkten Spalte, in der Zeile finden, welche in der ersten Spalte 96 hat. Da nun jedes Quadrat doppelt so viele Nullen als die Wurzel haben muß, so ist

$$\begin{aligned} 896000^2 &= 802816000000, \text{ ferner ist} \\ 543^2 &= 294849 \text{ und} \\ 2.896000.543 &= 973056000, \text{ folglich} \\ \hline 896543^2 &= 803789350849 \end{aligned}$$

II. Beyspiel. Es sey die Würfelzahl von 43217 zu finden, so setze man a = 43000 und b = 217, so wird nach der Tafel

43^3

$43^3 = 79507$ gefunden, mithin ergiebt sich, da die Würfelzahl jederzeit dreymal so viel Nullen als die Wurzel haben muß, $43000^3 = 79507000000000$. Eben so findet sich $217^3 = 10218313$. Endlich so ist 3. 43000. 217. 43217 = 806515654000. Diesemnach erhalten wir

$$a^3 = 79507000000000.$$
$$b^3 = 10218313$$
$$3\,ab\,(a + b) = 806515654000$$
$$(a + b)^3 = 80313525872313$$ gleich der gesuchten Würfelzahl von 43217.

§. 9.

Eben so vortheilhaft sind auch diese Tabellen beym Ausziehen der Wurzeln zu gebrauchen. Denn obgleich die Fälle nur selten vorkommen, daß eine gegebene Zahl genau unter den Zahlen der Tabelle sich findet, oder durch die Theilung mit einer Quadrat- oder Würfelzahl darauf gebracht werden kann, so dienen demnach diese Tafeln in allen Fällen, um wenigstens die 3 ersten Ziffern der gesuchten Wurzel zu bestimmen, so wie es aus folgenden Beyspielen erhellet.

I. Beyspiel. Es sey aus 296543205 die Quadratwurzel zu finden, so kommt, wenn man diese Zahl gehörig in Classen theilet 2 | 96 | 54 | 32 | 05, davon die höchste Classe anzeigt, daß die erste Ziffer der gesuchten Wurzel nur 1 seyn kann; man suche daher in der Tafel der Quadratzahlen in der Spalte 100 eine Zahl, welcher derjenigen, so durch die drey ersten Classen ausgedruckt werden kann, am nächsten kommt; diese finden wir in der vorne mit 72 bemerkten Zeile 29584, woraus wir schließen, daß die 3 ersten Ziffern der gesuchten Wurzel 172 seyn.

Will man die gesuchte Wurzel weiter genau haben, so darf man nur die Zahl 29584 von den 3 ersten Classen gehörig abziehn, zum Rest die vierte Classe hinzusetzen, und übrigens mit dem gefundenen Theil der Wurzel 172, wie gewöhnlich, weiter verfahren.

II. Beyspiel. Wollte man eben so die Cubicwurzel von 853076249485557 haben, so käme die Rechnung auf eine ähnliche Art, wie folget, zu stehen.

85	307	624	948	557	440
85	184	000			
123624					

so weit würde man nemlich die gesuchte Cubic-Wurzel unmittelbar aus den Tabellen finden; verfährt man daher mit dem Rest 123624 und den folgenden Classen, wie gewöhnlich, so kann auch die gesuchte Wurzel weiter bestimmt werden.

§. 10.

Die Formeln für die Berechnung der Kugelhaufen geben unmittelbar folgende Regeln:

Regel für ordentliche dreyseitige Haufen.

Man addire zur Zahl, welche die Kugeln in einer jeden Seite der Grundfläche ausdrückt erstlich 1 und ferner 2.

Die drey hierdurch gefundene Zahlen multiplicire man miteinander, und theile das Product durch 6, so kommt die Summe aller Kugeln des ganzen Haufens heraus.

Beyspiel. Es sey die Anzahl der Kugeln in der einen Seite der Grundfläche eines dreyseitigen Haufens 11, so giebt die Formel $S = \frac{11.\ 12.\ 13}{1.\ 2.\ 3} = 11.\ 2.\ 13 = 286$ Kugeln, und eben dieses giebt die obige Regel.

Regel für ordentliche vierseitige Haufen.

Man zähle die Kugeln einer Seite der Grundfläche, welche hier ein Quadrat ist und vermehre die gefundene Zahl selbst, sowohl als das Zweyfache dieser Zahl um 1.

Die dadurch erhaltene drey verschiedene Zahlen multiplicire man in einander, und theile das Product durch 6, so kommt die Anzahl aller Kugeln heraus.

Beyspiel. Es sey $n = 25$, so haben wir $S = \frac{25.\ 26.\ (2.\ 25 + 1)}{1.\ 2.\ 3.} = \frac{25.\ 26.\ 51}{1.\ 2.\ 3} = 25.\ 13.\ 17 = 5525$ Kugeln, und eben dieses wird durch vorstehende Regel gefunden.

Regel für länglicht viereckigte Haufen.

Man zähle die Kugeln, welche in der untersten Schicht in der Länge und Breite liegen, nehme die erstere Zahl dreyfach, und ziehe davon die um eine Kugel verringerte Breite ab.

Die gefundene Zahl multiplicire man mit der Breite selbst, und was herauskommt ferner mit der um 1 vermehrten Breite, und theile das Product durch 6.

Bey-

Beyspiel. Es sey die Länge der untersten Schicht $l =$ 23 Kugeln, und die Breite $b = 10$ Kugeln, so giebt die Formel

$$S = \frac{10.\ 11.\ (3.\ 23. - 9)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{10.\ 11.\ 60}{1.\ 2.\ 3} = 10.\ 11.\ 10 =$$

1100 Kugeln, und eben dieses giebt die Regel.

In diesem Fall hat der Rücken $23 - 10 + 1 = 14$ Kugeln, und man findet mittelst der letzten Formel

$$S = \frac{10.\ 11.\ (2.\ 23. + 14)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{10.\ 11.\ 60}{1.\ 2.\ 3} = 10.\ 11.\ 10 =$$

1100 Kugeln, wie vorhin.

§. 11.

Endlich machet die Tafel der Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunst den Beschluß, bey welcher wir wenig zu erinnern finden, da der Titul dieser Tafel schon genug die Einrichtung derselben angiebt. Um allen Irrthum zu vermeiden, habe ich die Hülfslinien selbst von ihren Logarithmen getrennt, und auf verschiedene aber gegenüberstehende Seiten gebracht. Alle Bögen oder Winkel, die kleiner als 45° sind, müssen in der ersten Spalte, von oben nach unten, der Ordnuug nach, aufgesucht werden, und für diese gelten die Ueberschriften der Spalten. Hingegen muß man alle Winkel, die größer als 45° sind, in der letzten Spalte nachschlagen, und in diesem Falle müssen bey jeder Spalte die Unterschriften genommen werden. Durch diese Einrichtung stehet immer der Cosinus dem Sinus und die Cotangente der Tangente des nemlichen Bogens oder Winkels zur Seite, welches öfter beym Nachschlagen sehr bequem ist. Diese Tafeln enthalten ferner die Hülfslinien, nebst ihrem Logarithmen nur für die fünf ersten und letzten Grade von Minute zu Minute, für den übrigen Theil des Viertheil eines Kreises aber nur von zehen zu zehen Minuten. Man kann daher da, wo ein Winkel unter 5 Graden oder über 85 Graden beträgt, die Hülfslinien und deren Logarithmen unmittelbar aus den Tabellen ausschreiben, wenn der Bogen oder Winkel auch bis auf einer Minute genau gegeben wäre, und eben so kann man umgekehrt, in diesem Falle, aus einer gegebenen Hülfslinie oder denen Logarithmen den zugehörigen Bogen bis auf einer Minute genau und geradezu aus den Tabellen finden. Da ich es für unnöthig gehalten habe, Zahlen öfter zu wiederholen, so habe ich solche Zahlen allenthalben weggelassen, die

nur öfter hätten geschrieben werden müssen. Man muß daher da, wo man in den Tabellen leere Räume findet, entweder die über oder unter dem leeren Raum stehende Ziffern als Anfangsziffern einer Hülfslinie, eines Logarithmen, oder eines Unterschiedes dieser Hülfslinien oder Logarithmen betrachten, so wie uns dieses folgende Beyspiele mit mehrerm zeigen werden.

Die angegebene Unterschiede dienen da, wo die Tabellen von Minute zu Minute fortgehen, nur um die Richtigkeit einer angegebenen Zahl, welche eine Hülfslinie oder deren Logarithmen ausdrückt, zu prüfen. Der Raum hat es uns nicht erlaubt, diese Unterschiede gleich zu Anfang der Tabellen allenthalben anzugeben, daher kommt es, daß dieselben bey einigen Spalten weggeblieben sind; weil hingegen eben diese Unterschiede da nicht wegbleiben konnten, wo alles nur von zehn zu zehn Minuten fortgehet, weil sie da besonders dienen, um die Hülfslinien und ihre Logarithmen durch eine leichte Rechnung von Minute zu Minute zu finden, so habe ich lieber da, wo es der Raum nicht anders erlaubte, die Anfangsziffer der ganzen Spalte, nebst dem zugehörigen Comma gleich hinter dieser Spalte ganz oben in den leeren Raum unter *Unt.* gesetzet. Es beziehet sich daher diese Ziffer, welche immer o ist, nicht auf die Spalte, worinnen sie stehet, sondern vielmehr auf die vorhergehende, in welcher bloß der zu derselben gehörige zehentheilige Bruch angetroffen wird.

§. 12.

Wir wollen nunmehro durch Beyspiele den Gebrauch dieser Tabellen erläutern, und zuförderst den ersten Theil der Tabellen, welcher von Minute zu Minute fortgehet, ins Licht setzen.

I. Beyspiel. Es sey die Tangente von 3°. 7′ zu finden, so suche man in den beyden ersten Spalten nach, wo 3°. 7′ stehen, und führe in der nemlichen Zeile den Finger bis in die Spalte, welche Tangens zur Ueberschrift hat, so finden wir zuförderst einen leeren Raum, wo aber die unmittelbar über und unter demselben befindliche Ziffern o, c5 stehen müßten, die wir hier zuförderst zu wiederholen haben, ehe wir die übrigen Ziffern 44498 hinzufügen. Es ist demnach tang. 3°. 7′ = o, o544498.

II. Es soll der Bogen oder Winkel gefunden werden, davon der Logarithmus des Sinus 9, 9997663 ist.

Man

Man suche daher in den Spalten, welche Log. Sin. zur Ueberschrift oder Unterschrift haben, eine Zahl, welche 9.9997663, so nahe als möglich kömmt. Eine solche Zahl findet sich 9.9997653 in der Spalte, so Log. Sin. zur Unterschrift hat, und zwar in derjenigen Zeile, wo in den beyden letzten Spalten, welche jederzeit genommen werden müssen, sobald die Unterschrift einer Spalte ist gebraucht worden, 88 Grad 7 Minuten stehen. Mithin ist Log. sin. 88°. 7′ = 9.9997653, und da der gegebene oder gefundene Logarithmus des Sinus nur sehr wenig von diesem letzten verschieden ist, so können wir den gesuchten Bogen oder Winkel gleich 88 Grad 7 Minuten annehmen.

§. 13.

Ob gleich die Hülfslinien, sowohl als ihre Logarithmen von 6 Grad bis 85 Grad nur von 10 Minuten zu 10 Minuten fortgehen, so kann man dennoch, mittelst der Unterschiede, so neben jeder Spalte der Hülfslinien oder der Logarithmen, in besondern Spalten vorkommen, und durch eine leichte Rechnung die Hülfslinien, sowohl als die Logarithmen derselben, für jeden gegebenen Bogen oder Winkel finden, indem man nach folgender Vorschrift verfähret:

1°. Suche man die Hülfslinie oder den Logarithmen derselben für die nächsten zehen Minuten des gegebenen Bogens gehörig aus den Tabellen.

2°. Da, wo man diese Hülfslinie findet, schreibe man sogleich den darnebenstehenden Unterschied aus, und schließe: wie sich verhalten zehen Minuten zum Ueberschuß des gegebenen Winkels über denjenigen, so dem gegegebenen bis unter zehen Minuten am nächsten kommt, eben so verhält sich der Unterschied der Hülfslinien zum vierten Proportional-Gliede.

3°. Dieses vierte Proportional-Glied setze man zu der nach 1 gefundenen Hülfslinie hinzu, oder ziehe es davon ab, nachdem entweder die Hülfslinien mit den Winkeln wachsen oder abnehmen, so kommt das gesuchte heraus.

Beyspiel. Es sey log. cot. 57°. 43′ zu finden, so giebt die Tabelle unmittelbar log. cot 57°. 40′ = 9.8013957 und der Unterschied ist hier 27993, mithin schließe man

10 : 3 = 27993 ; vierten Gliede,

mithin, da dies vierte 8398 gefunden wird, so ist, weil die Logarithmen der Contangenten abnehmen, indem die Winkel zunehmen log. cot. 57°. 43′ = 9.8013957 + 8398 = 9.8022355.

§. 14.

§. 14.

Soll hingegen umgekehrt der Winkel aus der gegebenen Hülfslinie oder deren Logarithmen bis auf eine Minute, genau gefunden werden, so suche man

1°. In der Tabelle diejenige Hülfslinie, so der gegebenen am nächsten kommt, ziehe sie von der gegebenen ab, und merke sowohl den Rest als auch den Winkel, bey welchem die abgezogene Hülfslinie ist gefunden worden.

2°. Schließe man: wie sich verhält der Unterschied der Hülfslinien, den man neben der abgezogenen Hülfslinie findet, zu dem nach 1° erhaltenen Rest eben so verhalten sich zehen Minuten zum vierten Proportional Gliede.

3°. Addire man dieses vierte Proportional Glied zu dem nach 1° bereits gefundenen Winkel, im Fall die Winkel zugleich mit den Hülfslinien zunehmen, oder ziehe es davon ab, wenn das Gegentheil statt findet, so kommt der gesuchte Winkel heraus.

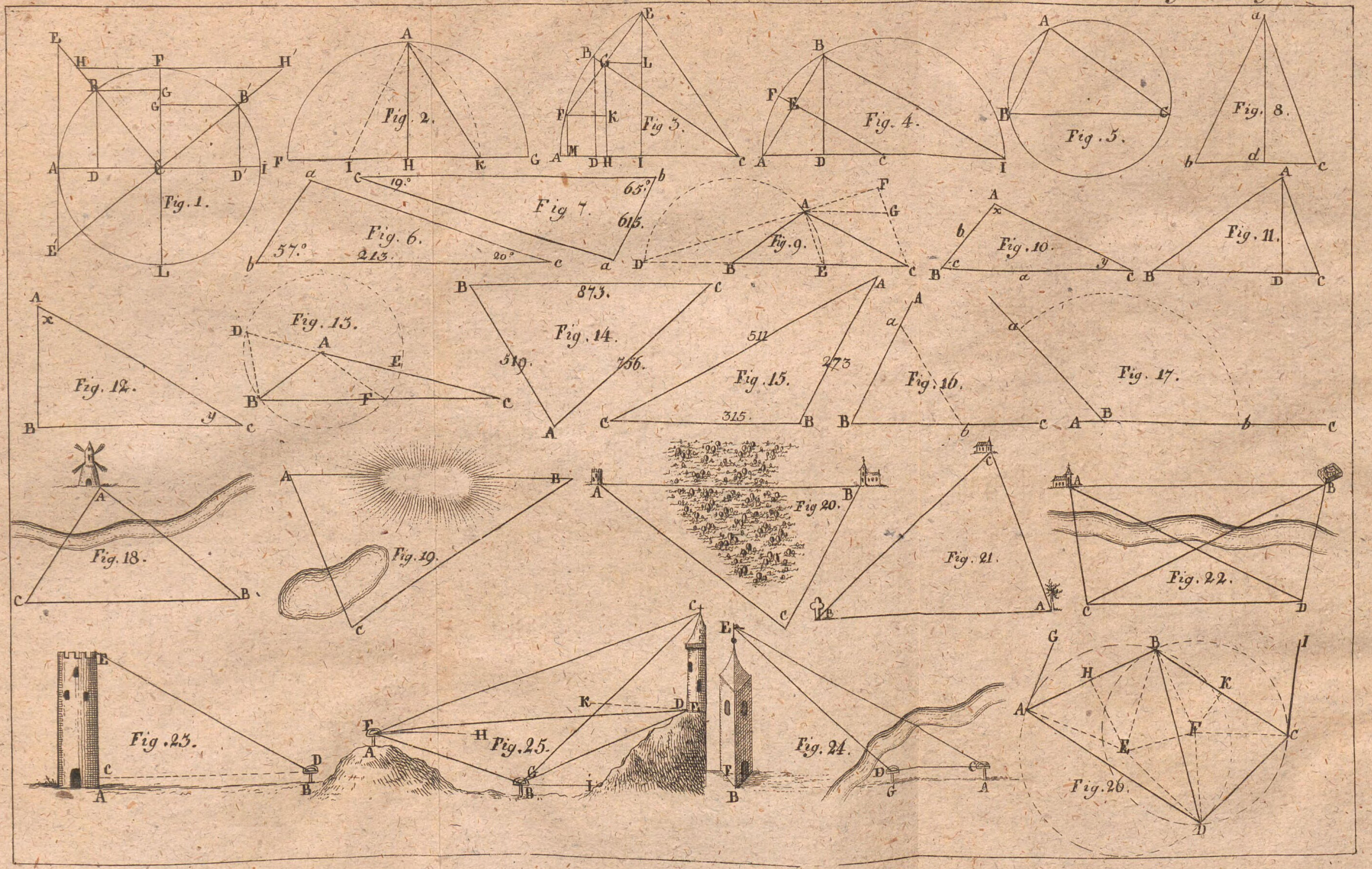
Beyspiel. Es wird der Sinus eines Winkels durch die Zahl 0,6547869 bestimmt, man will wissen: wie groß der zugehörige Winkel seyn werde. Nun finden wir unter den Sinus in den Tabellen die Zahl 0,6538609, welche der gegebenen am nächsten kommt, und nur 9260 zum Rest lässet, indem wir sie davon abziehen. Diese Zahl wird aber bey 40°. 50′ angetroffen, und der Unterschied derselben von der nächstfolgenden ist 21981 angegeben, mithin schließe man

$$21981 : 9260 = 10' : \text{vierten Gliede.}$$

Da nun dieses vierte Glied gleich 4′ gefunden wird, und die Winkel mit den Sinus wachsen, so ist der gesuchte Winkel $= 40°. 54'$.

Anmerkung. Obgleich die in diesem und vorigem § erklärte Methoden nicht nach aller Strenge richtig sind, weil die Unterschiede nicht beständig bleiben, so kann man sich dennoch derselben mit Zuverläßigkeit bey vielen practischen Fällen bedienen, wo es eben nicht darauf ankommt, einen Winkel bis auf die letzte Minute genau zu haben. Uebrigens verweise ich auch hier meine Leser, so sich näher mit dem Einschalten bekannt machen wollen, auf den zweyten Heft meines Taschenbuches, wo diese Materie umständlicher abgehandelt ist.

Zur Dreyeck Messkunst.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schulze, Johann Karl,

Kurze Anleitung zur ebenen Dreyeck-Meßkunst nebst nöthigen Tabellen besonders für diejenigen, so diese Wissenschaft nur auf die Feldmeßkunst, Krieges- und bürgerlichen Baukunst anwenden wollen

Berlin 1784

Math.p. 7
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081384-2
VD18 90245628